

空孔配列による異方性とその発展を 考慮した多孔質材料の弾塑性解析

2017年3月

東京農工大学大学院工学府
機械システム工学専攻

飯塚 誠

Elastic-plastic analysis of porous materials considering anisotropy and its evolution caused by arrangement of voids

Makoto IIZUKA

Abstract

During plastic deformation, the influence of microscopic voids on macroscopic mechanical behavior is important consideration, because ductile fracture occurs through the nucleation, the growth and the coalescence of voids. The GTN model is also used to describe these effects of voids. However, GTN model cannot describe anisotropy caused by distribution of voids. So the purpose of this study is to analyze these porous materials by finite element analysis. The method of analysis and constitutive equations are developed.

At first, deformation behavior for perforated metal sheets with randomly distributed holes are analyzed by using anisotropic Gurson's yield function. The constitutive equation is developed by Nagaki et al. Generally, such a complex shape models are difficult to analysis because large number of elements and nodes are required to analyze. On the other hand, the analysis method developed here requires only small number and simple shape of elements. The accuracy is validated by using normal analysis method and examination of perforated sheet.

Next, the constitutive equation is improved to be able to consider three dimensional growth of voids. The evolution equation of internal state variables are established in order to represent the direction of strain, strain rate and their histories. Thermomechanical consideration based on Clausius-Duhem's inequality is used to derive the model. Theoretical results of present theory are compared to the model postulating infinite periodic voids distributed model. It is confirmed that the constitutive equation can describe stress-strain relationship and three dimensional growth of void.

However, present model could not consider work hardening of matrix material. So the specific form of the dissipation inequality is modified and thermomechanical conjugate force is established. The new yield function is presented by using thermomechanical conjugate force derived above. The accuracy of the model is validated by FEA of unit cell in yield surfaces and stress - strain relationship. It is shown that the present theory has a good agreement with FEA. On the other hand, a parameter for the theory has changed for yield surface between strain - damage relationship.

At last, it is tried to introduce the effect of plastic strain direction to the constitutive equation derived from anisotropic Gurson's yield function. Anisotropic growth of void is represented by only a constant parameter. Growth behavior of holes of the perforated sheets are experimentally observed to validate the presented constitutive equation. The present theory has shown the good agreement with experimental result with a few arrangements of holes by constant parameters.

In summary of this paper, a few constitutive equations and analysis method for porous ductile materials are presented. Successfully the accuracy is validated for some cases of stress, strain and damage conditions by comparing the models of porous materials. Present method has possibilities to predict deformation and fracture behavior of the materials including voids.

目次

| | | |
|--------------|-----------------------------------|-----------|
| 第 1 章 | 序論 | 1 |
| 1.1 | 背景 | 1 |
| 1.2 | 他の研究者による研究例 | 2 |
| 1.2.1 | GTN モデル | 2 |
| 1.2.2 | スカラー量による空孔の表現 | 4 |
| 1.2.3 | Hill のパラメータによる異方性の表現 | 5 |
| 1.2.4 | 損傷テンソルによる異方性の表現 | 5 |
| 1.2.5 | 均質化法による微視的構造の考慮 | 7 |
| 1.3 | 関連研究の現状と課題 | 7 |
| 1.4 | 関連する近年の研究例 | 8 |
| 1.5 | 本研究における課題解決方法 | 9 |
| 第 2 章 | 提案する構成式と有限要素モデル化手法 | 11 |
| 2.1 | 緒言 | 11 |
| 2.2 | 空孔分布形態のモデル化 | 11 |
| 2.2.1 | 3次元空孔規則配列モデル | 11 |
| 2.2.2 | 2次元空孔不規則分布モデルとボロノイ領域分割法 | 11 |
| | ボロノイ領域分割法 | 12 |
| | ボロノイ多角形の長方形領域への変換 | 12 |
| 2.3 | 損傷テンソルと実質応力テンソル | 14 |
| 2.4 | 異方性 Gurson の降伏関数と空孔の等方的成長を考慮した構成式 | 16 |
| 2.4.1 | Gurson の降伏関数と GTN モデル | 17 |
| 2.4.2 | 異方性 Gurson の降伏関数 | 17 |
| 2.4.3 | 空孔の等方的成長の仮定による弾塑性構成式の導出 | 18 |
| 2.5 | 構成式に対する熱力学的制約条件 | 22 |
| 2.5.1 | Clausius-Duhem の不等式 | 22 |
| 2.5.2 | 散逸ポテンシャルと一般化流束の法線性 | 24 |
| 2.6 | 異方性 Gurson の降伏関数に基づいた異方損傷発展式の導出 | 25 |

| | | |
|--------------|-------------------------------------------------|-----------|
| 2.6.1 | Helmholtz 自由エネルギー関数 | 26 |
| 2.6.2 | 散逸ポテンシャルと構成式的具体形 | 27 |
| 2.6.3 | 母材非圧縮条件の組み込み | 29 |
| 2.7 | 散逸不等式と散逸ポテンシャルに関する再考察 | 30 |
| 2.7.1 | 多孔質材料における散逸不等式の損傷テンソルによる表現 | 30 |
| 2.7.2 | 散逸ポテンシャルと構成式的具体形 | 31 |
| 2.8 | 異方性 Gurson の降伏関数における損傷発展式への塑性ひずみ速度の導入 | 33 |
| 2.8.1 | スカラー関数による塑性ひずみ速度と損傷テンソルの影響の表現 | 34 |
| 2.8.2 | 構成式的具体形 | 34 |
| 2.9 | 結言 | 35 |
| 第 3 章 | 局所的損傷と変形を考慮した有限要素解析への応用 | 36 |
| 3.1 | 緒言 | 36 |
| 3.2 | 有限要素解析方法 | 36 |
| 3.2.1 | 各積分点における損傷変数の初期値 | 36 |
| 3.2.2 | 母材の相当応力-相当ひずみ関係 | 37 |
| 3.2.3 | 解析対象 | 38 |
| 3.2.4 | 要素分割と境界条件 | 39 |
| 3.2.5 | ソフトウェアと構成式の数値積分方法 | 41 |
| 3.2.6 | ドロネー三角形分割を用いた平均化ひずみの算出方法 | 41 |
| 3.3 | 解析手法の妥当性検証実験 | 42 |
| 3.3.1 | 実験方法 | 42 |
| 3.3.2 | 測定方法 | 45 |
| 3.4 | 結果および考察 | 46 |
| 3.4.1 | 単軸応力下における実験結果と空孔を直接分布させた有限要素解析結果の比較 | 46 |
| 3.4.2 | 単軸応力下における直接空孔を分布させたモデルとメゾスケールモデルの比較 | 47 |
| | 通常の Gurson の降伏関数と異方性 Gurson の降伏関数の比較 | 48 |
| | 様々な分布形態における妥当性の評価 | 50 |
| | 要素分割の影響の検討 | 53 |
| 3.4.3 | 2 軸応力下における直接空孔を分布させたモデルとメゾスケールモデルの比較 | 54 |
| | パラメータ h の影響 | 54 |

| | | |
|--------------|--------------------------------------------------------|-----------|
| | 空孔分布形態の不規則性とパラメータ h に対する依存性の関係 | 57 |
| 3.5 | 結言 | 58 |
| 第 4 章 | 異方性 Gurson の降伏関数に対する異方損傷発展則の妥当性検証 | 59 |
| 4.1 | 緒言 | 59 |
| 4.2 | 単位セルの有限要素解析 | 59 |
| 4.2.1 | 母材の材料特性 | 59 |
| 4.2.2 | 解析対象と要素分割 | 59 |
| 4.2.3 | 境界条件 | 60 |
| 4.2.4 | 各量の導出方法 | 62 |
| 4.3 | 構成式の数値積分 | 62 |
| 4.4 | 結果および考察 | 63 |
| 4.4.1 | エネルギー散逸に関する考察 | 63 |
| 4.4.2 | 空孔形状の楕円体近似の妥当性 | 67 |
| 4.4.3 | 3 軸ひずみ下における応力-ひずみ-損傷テンソル関係 | 69 |
| 4.4.4 | 単軸応力下における応力-ひずみ-損傷テンソル関係 | 74 |
| 4.5 | 結言 | 75 |
| 第 5 章 | 損傷共役力と散逸ポテンシャルの再検討 | 77 |
| 5.1 | 緒言 | 77 |
| 5.2 | 有限要素解析条件 | 77 |
| 5.2.1 | 空孔分布形態 | 77 |
| 5.2.2 | 要素分割 | 79 |
| 5.3 | 降伏関数の妥当性 | 79 |
| 5.3.1 | 純偏差応力下における π 平面上の降伏曲線 | 82 |
| 5.3.2 | 静水応力下における降伏関数 | 85 |
| 5.3.3 | 等方損傷状態における $\sigma_H - \sigma_{eq}$ 平面上の降伏曲線 | 86 |
| 5.3.4 | 塑性異方性の検証 | 88 |
| 5.3.5 | 応力-ひずみ線図と損傷テンソルの発展の比較 | 90 |
| 5.4 | 結言 | 91 |
| 第 6 章 | 多孔平板における空孔成長挙動の観察と加工硬化の影響 | 92 |
| 6.1 | 緒言 | 92 |
| 6.2 | 多孔平板の引張試験による空孔成長挙動の観察 | 92 |
| 6.2.1 | 試験片 | 92 |

| | | |
|------------|--------------------------------|------------|
| 6.2.2 | 試験・計測方法 | 94 |
| 6.2.3 | 結果と考察 | 94 |
| 6.3 | 結言 | 95 |
| 第7章 | 結論 | 97 |
| 付録A | Benzerga による空孔結合過程の降伏関数 | 99 |
| | 参考文献 | 103 |
| | 学術論文 | 110 |
| | 国際会議 | 110 |
| | 国内会議 | 111 |
| | 謝辞 | 112 |

第1章 序論

1.1 背景

金属材料は、高い強度を持つことや加工がしやすいことにより、多くの機械システムに使用されている。このような機械システムを軽量に、または安価に設計するためには、使用する材料の質量を低減することが求められる。近年ではコンピュータの発展に伴い、このような設計活動を有限要素解析などのシミュレーション技術によって効率化することができるようになってきている。しかしながら、非弾性変形に代表される固体の変形挙動は十分にモデル化されているとは言えず、解析結果と実現象が異なるケースも存在する。

この中でも本研究で取り上げる課題は、空孔を有する延性材料の変形挙動である。例えば金属材料は、内部に微視的な空孔が発生・成長・結合を繰り返すことによって破壊に至ると考えられており、微視的な空孔が巨視的な機械的性質に及ぼす影響は、興味深い問題といえる。この仮定の模式図を図 1.1 に示す。また、鋳造や溶接と言った工法によって金属材料を加工する場合、その工程で発生する空孔によって強度が低下することも知られている。この他にも、発泡金属材料のように、軽量化を目的として意図的に空孔を分布させた材料も近年開発されている。

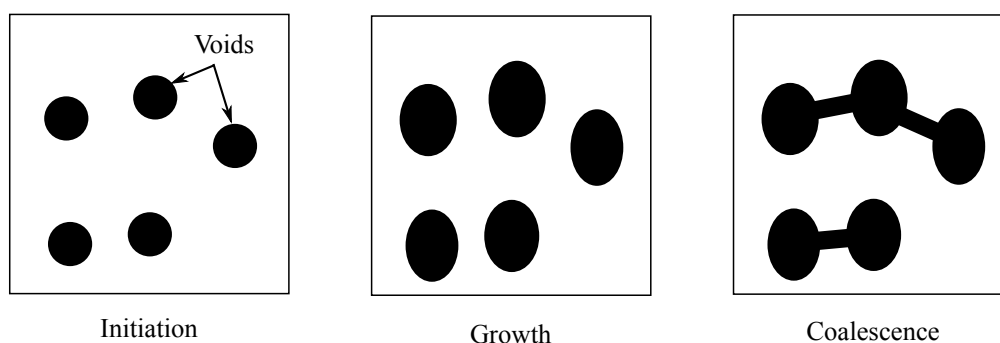


Fig. 1.1 Fracture process of ductile materials.

さらに着目すべき現象として、空孔の配列形態によって引き起こされる異方性がある。圧延加工といった方法によって加工された材料は、加工の方向に起因する空孔配列の方向性を持つ事がある。また、初期の空孔の分布形態に方向性がない場合でも、その後を受ける変形

第1章 序論

によって、空孔の幾何学的配置に方向性が生まれる事がある。前述した空孔の発生・成長・結合の挙動は、このように異方性を伴うことが一般的であり、それを考慮した変形・破壊予測手法の開発が望まれる。

この他にも、材料中の空孔分布形態の不規則性は、局所的な異方性や寸法効果といった現象をもたらす。特に寸法効果については構成式に組み込むことは難しく、例えば要素分割によって直接空孔を分布させたモデルを用いた有限要素解析が必要となる。しかしながら、これには非常に多くの節点数・要素数が必要であり、要素形状や分割も複雑となるため、現実的とは言えない。また、軽量化を目的として、パンチングメタルのような巨視的に円孔を分布させた構造物がよく用いられている。他にも、宇宙機におけるデブリ衝突など、能動的・受動的を問わず、円孔を有する構造物が多い、このような構造の有限要素解析においても、前述したように複雑で規模の大きな要素分割が必要となり、計算コストがかかってしまう。

そこで、空孔の影響による異方性を考慮した多孔質材料の変形解析技術を開発することを、本研究の目的とする。より具体的には、空孔の影響やその発展を考慮した構成式と、不規則に空孔が分布した材料の有限要素モデル化手法を開発する。母材は延性材料(特に金属材料)に着目し、金属の破壊を引き起こすポイドを主な対象として、1%~5%程度の空孔体積分率を扱う。破壊現象としてよく用いられる応力三軸度として、純粋せん断から三軸引張までの領域を考慮する。

1.2 他の研究者による研究例

1.2.1 GTN モデル

空孔の影響を考慮した構成式として、GTN モデルがよく知られている。Gurson⁽¹⁾は、図1.2のような球状領域内に一つの球状空孔があるモデルの剛塑性解析から、次式のような降伏関数 F_G を提案している。これは Gurson の降伏関数と呼ばれている。

$$F_G(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_M, f) = \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_M}\right)^2 + 2f \cosh\left(\frac{\sigma_{kk}}{2\sigma_M}\right) - (1 + f^2) \quad (1.1)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ は巨視的 Cauchy 応力テンソル、 σ_M は母材の降伏応力、 f は空孔体積分率、 σ_{eq} は Mises 型の相当応力である。上式は第2項において σ_{kk} を含んでおり、空孔の拡大に伴う巨視的な圧縮性を表現することができている。空孔の影響を f で表した構成式であることから、構成式の導出には f の発展式が必要となる。この発展式は、Chu・Needleman⁽²⁾によって空孔の成長や発生を考慮したものが提案されている。

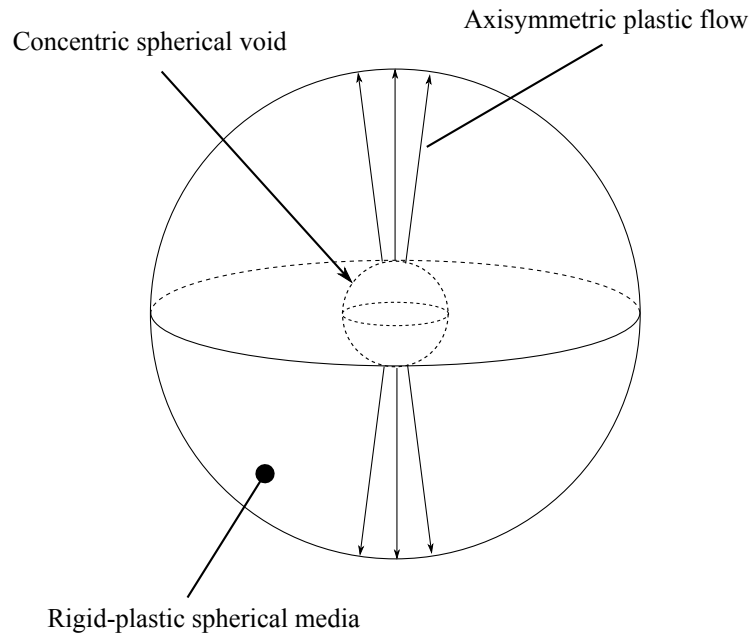


Fig. 1.2 Gurson's model of porous plastic material for rigid plastic analysis.

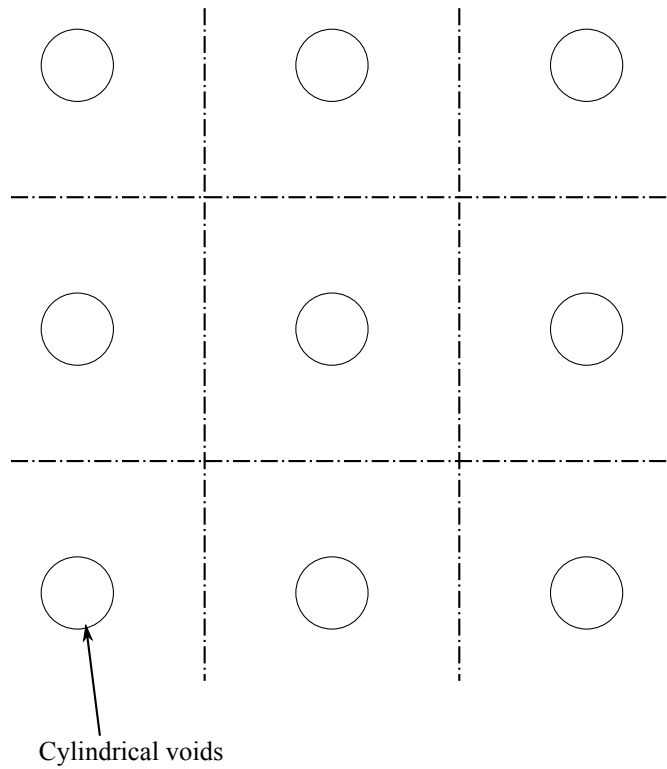


Fig. 1.3 Tvergaard's cylindrical voids model.

第1章 序論

前述の Gurson の降伏関数に対して, Tvergaard ⁽³⁾ は次式のような修正パラメータ q_1 , q_2 , q_3 を導入している.

$$F_T(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_M, f) = \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 + 2q_1 f \cosh \left(\frac{q_2 \sigma_{kk}}{2\sigma_M} \right) - (1 + q_3 f^2) \quad (1.2)$$

これは図 1.3 のような円柱状空孔が規則的に配列したモデルに対して, 平面ひずみを仮定して導出したものである. パラメータ q_1 は空孔体積分率の影響, q_2 は静水応力の影響をそれぞれ表している. q_3 は f がある程度以上大きくなった際に寄与が大きくなるパラメータで, 空孔結合時の挙動を表現するために用いられる.

これらのパラメータを含んだ構成式は GTN モデル (Gurson-Tvergaard-Needleman model) と呼ばれ, 延性金属材料の破壊解析によく用いられている. 例えば Tvergaard ⁽⁴⁾ は延性材料の局所変形の解析に応用している. Tvergaard・Needleman ⁽⁵⁾ は延性金属材料のカップアンドコーン型破壊の解析を行っており, 破断面における亀裂の進展挙動を表すことに成功している. Onate ら ⁽⁶⁾ は薄板のプレス成型における軸対称解析に利用した.

1.2.2 スカラー量による空孔の表現

GTN モデル以外にも, スカラー量によって空孔の影響を表現したモデルが提案されている. Lemaitre ⁽⁷⁾ は, 損傷力学の概念にもとづいて損傷変数 D を導入し, 内部の空孔や亀裂の影響を表現している. 図 1.4 のように, 内部に空孔や亀裂を持つ材料を考える. ある点における法線ベクトル n を持つ面について, (見かけ上の) 面積を S とし, この断面における空孔や亀裂の面積を S_D とする. 応力を受け持つことができるのは実質部である $S - S_D$ の部分であるが, 空孔の近傍や亀裂先端部においては応力集中が発生する. そこで Lemaitre は $\bar{S} < S - S_D$ となるような有効面積 \bar{S} と, 次式の損傷変数 D を定義した.

$$D = \frac{S - \bar{S}}{S} \quad (1.3)$$

損傷材料の力学的挙動は, 非損傷材料における面積 S を \bar{S} で置き換えることで表されると仮定したのが, 有効面積の概念と言える. Lemaitre は, 損傷変数 D を用いて熱力学的考察を行うことで構成式を導出している. 具体的には, 微視的空孔や亀裂の増加に伴う弾性係数の減少から Helmholtz 自由エネルギーの関数形を導いている.

Rousselier ^(8, 9) は Lemaitre と同様にスカラー量によって空孔の影響を表しているが, こちらは空孔体積分率 f を利用している. 損傷材料における散逸不等式を考察することで, 次式のような GTN モデルと類似した降伏関数 F_R を導出している.

$$F_R = \frac{1}{1-f} \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_M} + C \frac{\sigma^*}{\sigma_M} f \exp \left(\frac{1}{1-f} \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3\sigma^*} \right) - 1 \quad (1.4)$$

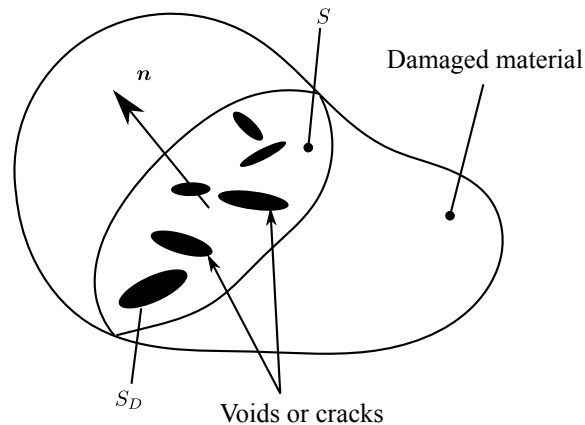


Fig. 1.4 Definition of damage variable D by Lemaitre's consideration.

C, σ^* は材料定数である。空孔体積分率の発展式は、GTN モデルと同様に母材の非圧縮性から導出されている。

1.2.3 Hill のパラメータによる異方性の表現

前述したモデルはいずれもスカラー量で空孔の影響を表現しているため、空孔配列形態の方向性に伴う異方性を表すことができない。そこで、次式のように GTN モデルに対して Hill のパラメータを導入することで、異方性を表現したモデルが提案されている。

$$F_H = \frac{3\sigma' : \mathbf{H} : \sigma'}{2\sigma_M^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{q_2 \sigma_{kk}}{2\sigma_M}\right) - (1 + q_3 f^2) \quad (1.5)$$

Gologanu ら⁽¹⁰⁾ は、楕円体状の空孔を持つモデルに対して軸対称な塑性流動を考え、降伏関数について検討している。空孔形状から計算されるパラメータを応力テンソルの各成分に作用させることで、空孔形状に起因する異方性を表している。Liao ら⁽¹¹⁾ や Wang ら⁽¹²⁾ は、母材の異方性を考慮して多孔平板の解析を行うため、Gurson の降伏関数に異方性パラメータ R を導入している。

Benzerga ら^(13, 14, 15, 16) は、破断面における空孔の顕微鏡観察や、空孔の成長・結合過程それぞれにおける降伏関数の導入による、異方性構成式を提案している。異方性は Hill のパラメータによって表されるが、各パラメータの発展式についてもモデル化している。

1.2.4 損傷テンソルによる異方性の表現

Hill のパラメータによって直交異方性を表現することは可能だが、空孔の影響による軟化や圧縮性と異方性が別個の量で表されている。これによって材料定数が多くなることや、各

第1章 序論

変数の発展式が必要となって構成式が複雑化する欠点がある．このため，空孔形状や配列形態に起因する異方性と圧縮性を同時に表すことができる変数の導入が望ましい．

このような量として，損傷テンソルが提案されている．村上・大野^(17, 18, 19, 20)は，クリープ変形に伴う損傷の異方性を表現するため，損傷変数を次式のような2階対称テンソル Ω へ拡張した．

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (i : \text{No sum.}) \quad (1.6)$$

\mathbf{n}_i は座標軸 X_i 方向の単位ベクトルである． Ω_i は Lemaitre による損傷変数 D と同様な量で， \mathbf{n}_i 方向における空孔・亀裂の面積分率である．

図 1.5 のように，面 ABC に応力ベクトル \mathbf{T} が作用する場合を考える．面 ABC が空孔や亀裂の存在によって損傷しているとすれば，実際に応力を受け持つことのできる面積は減少し，方向性があれば面積ベクトルの方向も変化する．このため，実際に応力を受け持つ面を面 $A^*B^*C^*$ とする．各面の面積ベクトルは，次式のような関係になる．

$$A^*\nu^* = (\mathbf{1} - \Omega)A\nu \quad (1.7)$$

このように，損傷テンソル Ω は $(\mathbf{1} - \Omega)$ として作用することで，面積ベクトルを実質面積ベクトルへ線形変換する．

それぞれに作用する合力ベクトルおよび実質合力ベクトルは，Cauchy の式から次式のように表すことができる．

$$A\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma}(A\nu), \quad A^*\mathbf{T}^* = \boldsymbol{\sigma}^*(A^*\nu^*) \quad (1.8)$$

さらに実質応力の考え方から，面 ABC に作用する巨視的合力ベクトルと面 $A^*B^*C^*$ に作用する実質合力ベクトルは等しいものとすれば，次式が得られる．

$$A^*\mathbf{T}^* = A\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{1} - \Omega)^{-1}(A^*\nu^*) = \boldsymbol{\sigma}^*(A^*\nu^*) \quad (1.9)$$

このように，応力 $\boldsymbol{\sigma}$ はテンソル $\Phi = (\mathbf{1} - \Omega)^{-1}$ によって実質応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}^*$ へ変換される．実際の計算には，次式のように対称化して使用される．

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\Phi + \Phi\boldsymbol{\sigma}) \quad (1.10)$$

Chow・Wang^(21, 22) や Chow・Lu^(23, 24) は，この損傷テンソルを用いて熱力学的考察に基づき，異方性構成式を提案している．この構成式は Chow ら^(25, 26) によって金属平板の成型限界線図の予測へ応用されている．早川・村上⁽²⁷⁾ や神谷・村上^(28, 29) は，Lemaitre と同様に弾性定数の変化から損傷テンソルの発展式と構成式を導出している．一方で，これらの構成式も Mises 型の降伏関数を仮定していることから，等方損傷状態における圧縮性を表現できない課題がある．

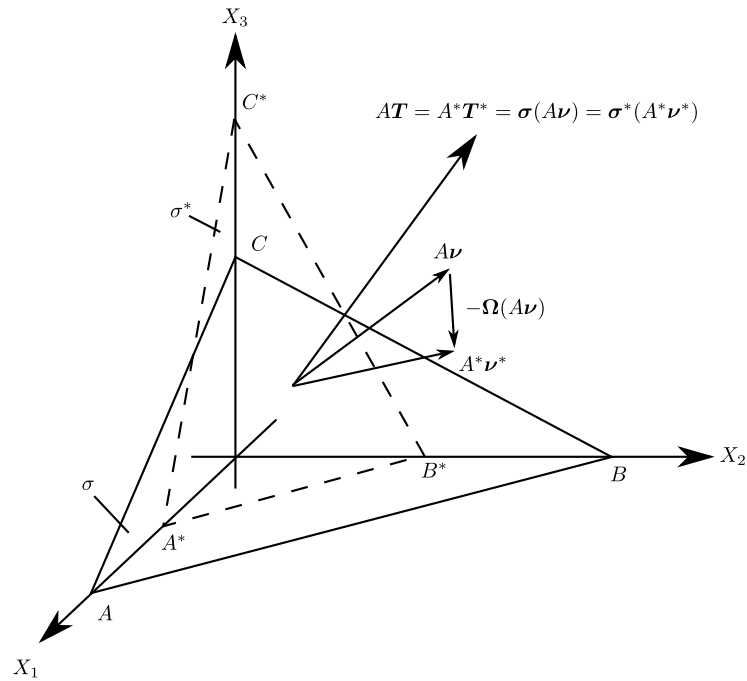


Fig. 1.5 Equivalent area vector and equivalent stress tensor.

1.2.5 均質化法による微視的構造の考慮

ここまでは構成式によって空孔の影響を考慮した研究例を紹介してきた。一方で、空孔のような微視的構造を持つ材料を解析する手法として、均質化法⁽³⁰⁾がある。線形弾性問題への適用が効果的であるが、近年では非線形問題・非弾性問題への適用も試みられている。

例えば Wu・Ohno⁽³¹⁾ は時間依存性のある非線形問題に均質化理論を利用し、Ohno ら⁽³²⁾ はセル構造体の微視的分岐挙動を解析している。本研究で扱うような多孔質材料への適用例としては、Ghosh ら⁽³³⁾ や Fritzen ら⁽³⁴⁾ によるものがある。

一方で、均質化理論として微視的構造の変形挙動を解析するだけでなくマクロ構造物の変形も解析を行う場合、計算負荷が非常に大きくなる⁽³⁵⁾。このような負荷を軽減する手法も提案されており⁽³⁶⁾ 興味深いアプローチではあるが、構成式による微視的構造の考慮にも利点がある。

1.3 関連研究の現状と課題

異方性と塑性圧縮性を同時に表現した降伏関数として、長岐・Sowerby^(37, 38) は損傷テンソルを Gurson の降伏関数に組み込んだ異方性 Gurson の降伏関数を提案しており、Goya ら⁽³⁹⁾

第1章 序論

も同様な降伏関数を提案している。長岐・Sowerbyはこの降伏関数の妥当性を空孔が格子状に分布した3次元有限要素モデルによって確認しているが、中山ら⁽⁴⁰⁾は巨視的に空孔を分布させた金属薄板を損傷材料の2次元理想化モデルとみなし、実験的に妥当性を確認している。

空孔分布形態の不規則性を考慮した研究としては、Magnusenら^(41, 42)による空孔結合挙動の検討や、中山ら⁽⁴³⁾による異方性 Gurson の降伏関数を用いた巨視的降伏挙動の検討がある。また、損傷テンソルを用いた空孔一つ一つに関する局所的な損傷状態の評価が、2次元モデルについては中山ら⁽⁴⁴⁾や長岐ら⁽⁴⁵⁾によって、3次元モデルについては大下ら⁽⁴⁶⁾によって行われている。

この異方性 Gurson の降伏関数および局所的損傷状態の評価方法の応用として、Nagakiら⁽⁴⁷⁾は空孔の影響を損傷テンソルで表現し、異方性 Gurson の降伏関数を用いて多孔平板の変形を有限要素解析した。損傷テンソルによる局所的損傷状態の評価だけでは変形挙動を予測することはできないが、構成式を用いた有限要素解析によって局所的変形挙動を計算できることが示された。しかしながら、Nagakiによる妥当性の検証は定性的であった。また、実験的検討や要素分割の影響についての検討も行われていない。

ところで、Nagaki⁽⁴⁷⁾は異方性 Gurson の降伏関数から構成式を導く際に、空孔の等方的成長を仮定している。これは比較的変形が小さい場合や比例負荷経路においては良い近似となれると思われるが、大変形時や非比例負荷経路においては限界がある。空孔の変形形状を考察した研究としては McClintock⁽⁴⁸⁾や Rice・Tracey⁽⁴⁹⁾による式が有名であるが、これらの式は空孔自身の変形のみを記述したものであるため、有効断面積の減少を表す損傷テンソルの発展式に直接適用することは難しい。Chow⁽²⁴⁾や早川・村上⁽²⁷⁾は熱力学的考察に基づき、損傷発展に伴うエネルギー散逸は空孔やき裂の生成によって解放される弾性ひずみエネルギーであると考え、異方損傷発展式を導出している。しかしながら、この考察が空孔の成長が支配的であるような損傷の発展に対しても適用できるかは不明である。

1.4 関連する近年の研究例

空孔の成長挙動に関連する研究として、Tvergaard⁽⁵⁰⁾や、Longèreら⁽⁵¹⁾は、せん断変形における空孔の変形挙動を有限要素解析によって調査している。GTNモデルは比較的応力三軸度の高い領域でよく使われる手法であるが、近年はこのように応力三軸度の小さな領域の研究も行われている。特に空孔が初期は球形であっても、楕円体形状に変化することがわかっており、この影響を考慮することが望まれる。

次に、降伏曲面に関する検討の例を挙げる。Khdірら⁽⁵²⁾は、空孔を不規則に分布させた3次元領域について有限要素解析を行い、降伏曲面について検討を行っている。Pastorら⁽⁵³⁾

は、楕円柱上の母材と空孔を仮定し、平面応力状態を仮定することで降伏曲面について検討を行っている。いずれも GTN モデルと有限要素解析結果を比較しているが、異方性についての検討は行われていない。

Pushkareva ら⁽⁵⁴⁾は、本研究に類似した規則的に円孔が配列した平板を用いて、空孔成長挙動の調査と破断面の観察を行っている。詳細な顕微鏡観察の結果が残されているが、変形・破壊挙動のモデル化には至っていない。

このように、空孔を有する材料の変形挙動について、近年においても多くの研究がなされている。一方で、異方性を考慮した構成式の開発については、多く行われていないのが現状である。

1.5 本研究における課題解決方法

本論文ではまず、Nagaki ら⁽⁴⁷⁾による解析手法の妥当性を定量的に確認した。具体的には比較対象となる平均化ひずみを多孔平板の変形に対して定義し、解析手法の妥当性を再検討した。引張応力だけでなく、いくつかの二軸応力状態においても検証を行っている。

次に、異方性 Gurson の降伏関数について熱力学的議論を行うことで、空孔の3次元的な成長を考慮した損傷発展式を導出することを試みた。空孔成長挙動の方向性を定めるパラメータを導入することにより、損傷テンソルの変化や応力-ひずみ関係を適切に表すことができるように改良している。

さらに、熱力学的制約条件をより厳密に満足するモデルを構築するため、散逸不等式と散逸ポテンシャルに関する再検討を行った。現象論的に導出されていた損傷テンソルの熱力学的共役力を、散逸不等式に基づいた理論的方法によって導出し直している。これを用いた降伏関数と構成式を求めており、いくつかの応力・ひずみ・損傷状態について妥当性を確認した。

最後に、より簡便なアプローチとして、異方性 Gurson の降伏関数における損傷テンソルの発展式に、塑性ひずみ速度の方向を組み込むことを考えた。熱力学的考察に基づいた導出と比べて単純ながら、応力・ひずみと損傷テンソルの発展する方向の関係を表すことに成功した。この妥当性の検証には、多孔平板の変形中における空孔形状・配列状態を観察する実験を行っている。

本章では、本研究の背景や目的を述べた。第2章では、Nagaki⁽⁴⁷⁾による異方性 Gurson の降伏関数やその構成式の導出過程を示すとともに、本論文で提案するモデルを示す。第3章では、空孔が不規則に分布した材料の変形解析方法として、異方性 Gurson の降伏関数とポロノイ多角形領域分割を用いた方法の妥当性を検証している。第4章では、異方性 Gurson の降伏関数から熱力学的考察を用いて導出した損傷発展式について、単位セルの有限要素解

第1章 序論

析によって妥当性を検証した。第5章では、新たに導出した散逸不等式と散逸ポテンシャルに基づいたモデルについて、降伏曲面と応力-ひずみ関係、および損傷テンソルの変化について、妥当性を検証する。第6章では、多孔平板において空孔の成長挙動を観察した結果について述べる。加工硬化挙動の異なる2つの材料について検討を行っており、それらが構成式によって表現可能かどうか検討を行った。

第2章 提案する構成式と有限要素モデル化手法

2.1 緒言

本章では、本研究で提案する多孔質材料の構成式と、有限要素モデル化の方法を説明する。構成式の中で、異方性 Gurson の降伏関数と空孔の等方的成長を考慮したものについては、長岐・Sowerby^(37, 38) および Nagaki ら⁽⁴⁷⁾ によって提案されたものである。これ以外の空孔の異方的成長を考慮した構成式については、全て本研究で新たに提案するものである。

2.2 空孔分布形態のモデル化

微視的な空孔分布形態と巨視的な変形挙動とを結びつけるためには、実材料の空孔の配列や形状などをモデル化する必要がある。本節では、本論文にて考察する空孔分布形態について説明する。

2.2.1 3次元空孔規則配列モデル

簡単な空孔配列形態として、図 2.1 のような空孔が格子状に配列したモデルを考える。このモデルでは、空孔は楕円体形状で格子状に配列しており、楕円体の主軸と配列軸とは一致するものとしている。各座標軸を X_i 、それと対応する方向における空孔間隔を $2L_i$ 、楕円体の半軸を a_i とする。このモデルの変形挙動は、図 2.2 に示す単位セルによって代表され、適切な境界条件のもとでは、例えば有限要素解析によって擬似無限媒体とした変形挙動の解析が可能である。

2.2.2 2次元空孔不規則分布モデルとポロノイ領域分割法

実材料における空孔の分布形態は、不規則であるのが自然である。前節のモデルは規則的な分布形態に簡略化したモデルであるが、より厳密には不規則に空孔を配置したモデルが必

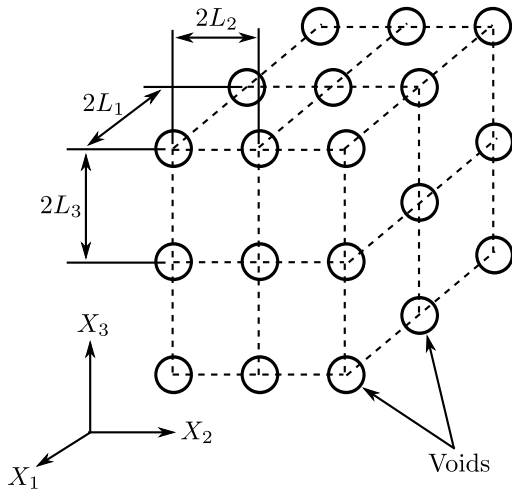


Fig. 2.1 Three dimensional voids regularly distributed model.

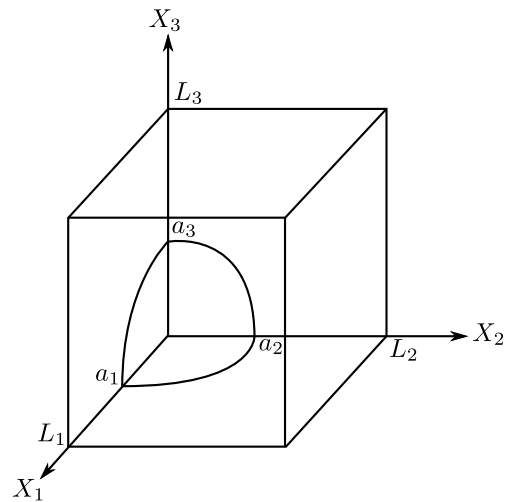


Fig. 2.2 Unit cell of 3D voids regularly distributed model.

要となる．そこで，不規則に空孔が分布したモデルについても構成式の比較対象に導入するが，簡単のため，ここでは薄板に円孔が不規則に分布した，2次元モデルを考える．

ポロノイ領域分割法

空孔が規則的に分布している場合では，損傷量は場所によらず一定であるとみなすことができる．一方で，空孔が不規則に分布している場合においては，空孔の密集している箇所とそうでない箇所，または空孔形状に応じて局所的な変形挙動は異なると考えられ，損傷量も場所によって変化する．このような局所的な損傷状態を評価するため，空孔の圆心を基点としたポロノイ領域分割⁽⁵⁵⁾を考える．

ポロノイ領域分割法とは，図 2.3 のように近傍の空孔同士を結んだ線分の垂直二等分線によって領域を分割するものである．各ポロノイ領域はポロノイ多角形と呼ばれ，各空孔の勢力圏とみなすことができる．本研究においては簡単のため，各ポロノイ領域内においては損傷量は同じ値となるものとする．

ポロノイ多角形の長方形領域への変換

損傷量を定義するにあたり，空孔が不規則に分布したモデルにおいても規則的な分布モデルと同様な定義が好ましいが，2.2.1 項のモデルとポロノイ多角形は形状が大きく異なる．

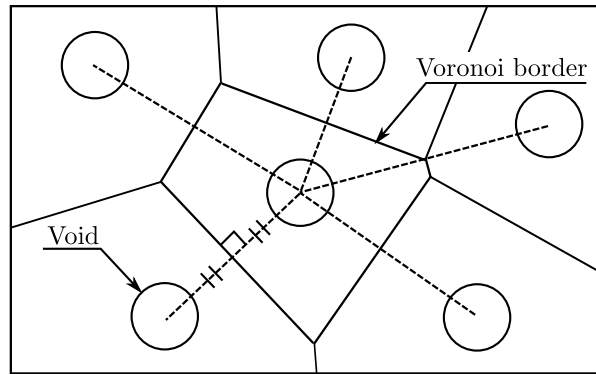


Fig. 2.3 Example of Voronoi tessellation.

そこで、局所的な直交異方性を仮定し、任意のポロノイ多角形を長方形領域へと変換することを考える。

中山ら^(43, 44)は、金谷⁽⁵⁶⁾によるステレオロジーの理論を、ポロノイ領域の境界線であるポロノイ領域に適用して長方形領域へと変換することを提案している。吉江⁽⁵⁷⁾は、この理論の簡便な解釈として、ポロノイ境界で構成される線分群をある面に投影した長さから変換する方法である、投影理論を提案している。ここでは、この投影理論について説明する。

例として、図2.4(a)のポロノイ多角形を考える。座標軸 X_1 から角度 θ だけ回転した軸 X'_1 に対してポロノイ多角形を投影した長さ D_1 を定義し、 D_1 が最小となる角度 θ を求める。これが長方形の主軸方向となる。投影長さが最大となるのは、それと直交する軸 X'_2 であり、 X'_2 軸に対する投影長さを D_2 とする。最終的に、変換後の長方形の長辺と短辺の長さ L_1 , L_2 の比は、 D_1 , D_2 の比と等しいものとし、変換後の長方形の面積 S_v が元のポロノイ多角形の面積と等しいものとするれば、変換後の長方形は次式のようなになる。

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{D_1}{D_2} \quad (2.1)$$

$$S_v = L_1 L_2 \quad (2.2)$$

これによって、空孔が不規則に分布した場合においても規則的な分布形態と共通した損傷量の定義が可能となる。ところで、円孔が楕円形である場合においては、一般に楕円の主軸と長方形の軸は一致しない。そのような場合における損傷量の定義については、林田⁽⁵⁸⁾が提案しているが、本論文では簡単のため、不規則分布モデルについては円空孔のみを考える。

この他の変換法として、萱沼⁽⁵⁹⁾は、最も近傍にある空孔との距離と空孔間を結んだ線分を用いて長方形へと変換する最近接空孔理論を提案している。また、後藤⁽⁶⁰⁾は、投影理論と最近接空孔理論とを組み合わせた融合法を提案している。しかしながら、最近接空孔理論

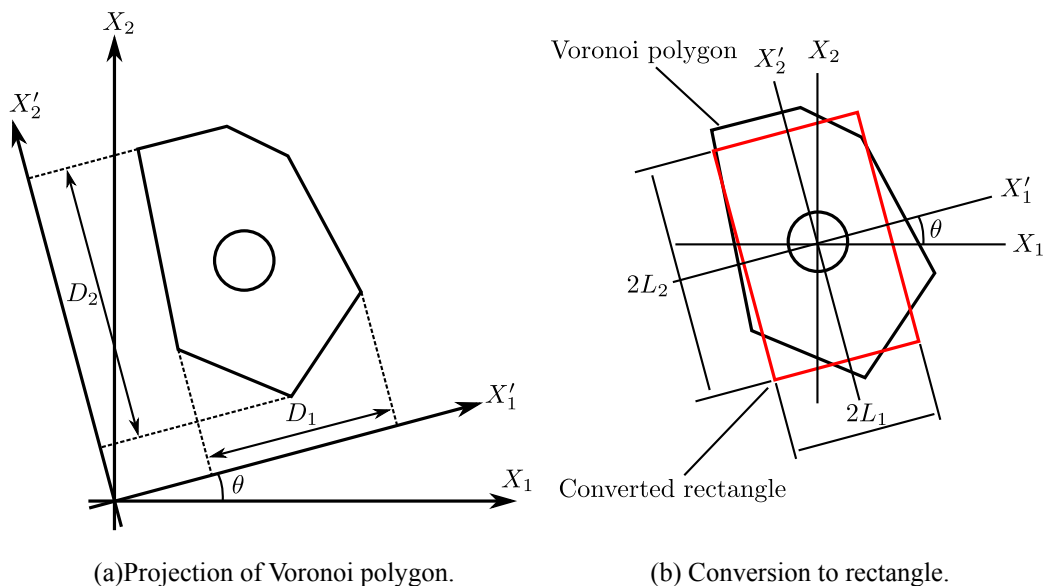


Fig. 2.4 Conversion from Voronoi polygon to rectangle using projection theory.

は3次元モデルに対する定義ができない問題点があり、融合法は投影理論に対する優位性が確認されていないことから、本論文では扱わないこととする。

2.3 損傷テンソルと実質応力テンソル

空孔の影響を考慮した構成式の構築には、空孔分布形態の幾何学的な情報を表現した内部状態変数が必要である。Gurson⁽¹⁾はスカラー量である空孔体積分率 f によって、空孔の影響を表現した降伏関数を提案している。しかしながら、異方性を考慮するためにはスカラー量でなく、方向性の情報を有する量によって空孔分布形態を表現する必要がある。

そのため、本研究では村上・大野^(17, 18, 19, 20)によって提案されている、損傷テンソル Ω を用いる。損傷テンソルは2階対称テンソルであり、その主値 Ω_i と対応する主方向単位ベクトル \mathbf{n}_i を用いて次式のように表される。

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (2.3)$$

Ω_i は \mathbf{n}_i 方向面における空孔の面積分率であり、以下のように定義する。

$$\Omega_1 = \frac{\pi a_2 a_3}{4L_2 L_3}, \quad \Omega_2 = \frac{\pi a_3 a_1}{4L_3 L_1}, \quad \Omega_3 = \frac{\pi a_1 a_2}{4L_1 L_2} \quad (3D \text{ model}) \quad (2.4)$$

$$\Omega_1 = \frac{a}{L_2}, \quad \Omega_2 = \frac{a}{L_1} \quad (2D \text{ model}) \quad (2.5)$$

2.3. 損傷テンソルと実質応力テンソル

a は 2 次元モデルにおける円空孔の半径である.

材料に巨視的な (見かけ上の) Cauchy 応力 σ が作用するとき, 空孔近傍においては応力を受け持つことのできる面積が見かけ上の面積よりも小さいことにより, 応力が拡大する. この拡大された応力を表す応力テンソルとして, 実質応力テンソル S が次式のように定義される.

$$S = \frac{1}{2}(\sigma\Phi + \Phi\sigma) \quad (2.6)$$

Φ は損傷テンソルの実質応力テンソルに対する効果を表すことから損傷効果テンソルと呼ばれ, 例えば次式のような形が用いられる⁽¹⁹⁾.

$$\Phi = (\mathbf{1} - \Omega)^{-1} \quad (2.7)$$

$\mathbf{1}$ は 2 階の恒等テンソルである.

この実質応力の物理的意味を考察するため, 図 2.5 のような厚みが単位長さである長方形領域に一つの円空孔があるモデルを考える. 巨視的な引張応力を σ , 母材内の微視的な応力のうち, σ と同じ方向の成分を s とする. 空孔圆心を通る面 $A^{(1)}$ における力のつりあいを考えれば,

$$2\sigma L = \int_{A^{(1)}} s dA^{(1)} \quad (2.8)$$

を得る. ここで, $A^{(1)}$ 面における微視的応力 s の平均値を \bar{s} とすれば,

$$\int_{A^{(1)}} s dA^{(1)} = \bar{s}(2L - 2a) \quad (2.9)$$

となる. 式 (2.8) および (2.9) を連立させて \bar{s} についてとけば,

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \sigma \frac{L}{L - a} \\ &= \sigma \frac{1}{1 - \frac{a}{L}} \\ &= \sigma \frac{1}{1 - \Omega} \\ &= \sigma\Phi \end{aligned} \quad (2.10)$$

が得られる. 上式の各量 \bar{s} , σ , Ω , Φ を, テンソル量 \bar{s} , σ , Ω , Φ によって置き換えると,

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \sigma(\mathbf{1} - \Omega)^{-1} \\ &= \sigma\Phi \end{aligned} \quad (2.11)$$

第2章 提案する構成式と有限要素モデル化手法

ただし, $\Omega = a/L$, $\Phi = 1/\Omega$ である. これは, 式 (2.6) における実質応力の定義と同様であることから, 前述した実質応力は空孔図心を通る面における応力の平均値であると解釈することができる. 式 (2.11) における \bar{s} は一般に非対称となるため, 対角成分についてそれと対応する対角成分との平均値をとって対称化したものが, 式 (2.6) の実質応力となる. ここでは1次元の簡便な議論から実質応力の力学的意味を考察したが, 3次元問題に対するより厳密な考察については, 村上・大野⁽¹⁹⁾の考察を参照されたい.

式 (2.7) を用いて計算される実質応力テンソルは, 上述したように単位セル内の空孔図心を通る面 $A^{(1)}$ における微視的応力 s を, 面内において平均したものと解釈することができる. しかしながら, この面 $A^{(1)}$ における微視的応力は, 他の面 (例えば図中 $A^{(2)}$ 面) に比べて大きいと考えられ, セル内部全体において平均した応力よりも実質応力テンソルは大きくなる. このような, 損傷の局所化の影響を考慮し, 次式のような補正パラメータ $c (0 \leq c \leq 1)$ が提案されている⁽²⁰⁾.

$$\Phi = (\mathbf{1} - c\Omega)^{-1} \quad (2.12)$$

c は損傷状態 (空孔形状) に依存することが示唆されている⁽⁶¹⁾ が, 比較的変形の小さい場合であれば一定とみなすことができると考えられる.

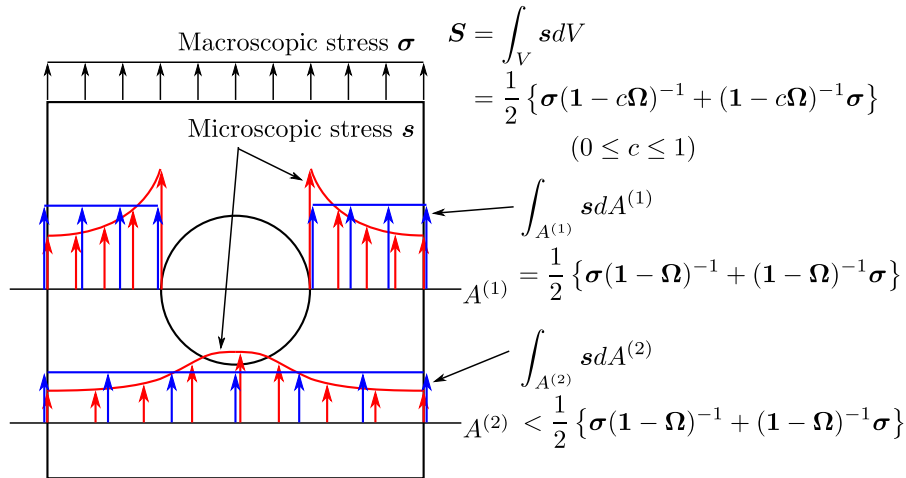


Fig. 2.5 Relation between microscopic stress and net stress.

2.4 異方性 Gurson の降伏関数と空孔の等方的成長を考慮した構成式

本節では, Nagaki⁽⁴⁷⁾によって提案された, 異方性 Gurson の降伏関数と空孔の等方的成長を仮定した構成式について説明する. なお, 以降の式において指標表記を用いる場合は,

2.4. 異方性 Gurson の降伏関数と空孔の等方的成長を考慮した構成式

総和規約に従う。すなわち、同じ項の中に2つの下添字がある場合は、その添字について和をとるものとする。

2.4.1 Gurson の降伏関数と GTN モデル

Gurson⁽¹⁾ は、球状領域内に一つの同心球状空孔がある剛塑性体モデルをもとに、次式の空孔体積分率 f を内部変数とした降伏関数 F_G を提案した (Gurson の降伏関数)。

$$F_G(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_M, f) = \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 + 2f \cosh \left(\frac{\sigma_{kk}}{2\sigma_M} \right) - (1 + f^2) \quad (2.13)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ は巨視的応力テンソル、 σ_M は母材の降伏応力、 f は空孔体積分率、 σ_{eq} は次式で表される Mises 型の相当応力である。

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad (2.14)$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.15)$$

$\boldsymbol{\sigma}'$ は $\boldsymbol{\sigma}$ の偏差成分、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。古典的な法線則を考えれば、材料の圧縮性を降伏関数によって表現するためには、応力の第1不変量 σ_{kk} を降伏関数に組み込む必要がある。Gurson の降伏関数は第2項でこれを表現しており、 $f = 0$ の場合には通常の Mises の降伏関数と一致する。

一方で、Tvergaard⁽³⁾ は、空孔が格子状に分布したモデルを対称として Gurson の降伏関数の妥当性を検証し、次式のようなパラメータ q_1, q_2, q_3 を追加することでモデルを高精度化した。

$$F_T(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_M, f) = \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 + 2q_1 f \cosh \left(\frac{q_2 \sigma_{kk}}{2\sigma_M} \right) - (1 + q_3 f^2) \quad (2.16)$$

Tvergaard・Needleman⁽⁵⁾ は、この降伏関数 F_T を利用して延性金属材料のカップアンドコーン型破壊の有限要素解析を行い、 $q_1 = 1.5, q_2 = 1.0, q_3 = q_1^2$ の値が実用的であるとしている。式 (2.16) のモデルは、金属材料の延性破壊問題に対して広く利用されており、GTN モデルと呼ばれている。

2.4.2 異方性 Gurson の降伏関数

GTN モデルは延性破壊の解析に広く用いられているが、空孔体積分率以外に空孔分布形態の情報を持っていないため、異方性を表現する事ができない。そこで、長岐・Sowerby^(37, 38)

第2章 提案する構成式と有限要素モデル化手法

は, Gurson の降伏関数の応力テンソル σ を実質応力テンソル \mathbf{S} で置き換えることで異方性を表現した, 次式の異方性 Gurson の降伏関数 F_{AG} を提案した.

$$F_{AG}(\mathbf{S}, \sigma_M, f) = \left(\frac{S_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 + 2f \cosh \left(\frac{h S_{kk}}{2\sigma_M} \right) - (1 + f^2) \quad (2.17)$$

h は静水応力成分の影響を表すパラメータ, S_{eq} は実質応力に対応する Mises 型相当応力であり, 次式で定義される (\mathbf{S}' は \mathbf{S} の偏差成分).

$$S_{eq}^2 = \frac{3}{2} S'_{ij} S'_{ij} \quad (2.18)$$

$$S'_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \quad (2.19)$$

Chow・Lu⁽²⁴⁾ や早川・村上⁽²⁷⁾ は, 損傷テンソルを内部状態変数とした熱力学的考察から, 損傷材料の異方性構成式を導出している. しかしながら, 彼らのモデルは実質応力について Mises 型の降伏関数を仮定しているため, 等方損傷状態において圧縮性を表現する事ができないといった問題点がある. 一方で異方性 Gurson の降伏関数は, 第1項において空孔分布形態による異方性を, 第2項で圧縮性を同時に表現しており, 他のモデルに対して優位性がある.

2.4.3 空孔の等方的成長の仮定による弾塑性構成式の導出

降伏関数 (2.17) をもとに, 弾塑性構成式を導出する. まず, ストレッチングの塑性成分 D^p について法線則が成り立つとすれば, 次式を得る.

$$D^p_{ij} = \Lambda \frac{\partial F_{AG}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.20)$$

Λ は未定乗数である. また, 塑性変形中において応力点は降伏曲面上にあることを表す Prager の適合の条件より, 次式が得られる.

$$\dot{F}_{AG} = \frac{\partial F_{AG}}{\partial S_{ij}} \dot{S}_{ij} + \frac{\partial F_{AG}}{\partial \sigma_M} \dot{\sigma}_M + \frac{\partial F_{AG}}{\partial f} \dot{f} = 0 \quad (2.21)$$

未定乗数 Λ は上式から求められる. よって, 構成式的具体形を決定するためには各量の時間変化率を定式化すれば良い.

まず, 実質応力の速度 $\dot{\mathbf{S}}$ については, \mathbf{S} が σ と Φ の関数であることから,

$$\dot{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial \Phi_{kl}} \dot{\Phi}_{kl} \quad (2.22)$$

となる. 式 (2.6) をもとに $\partial \mathbf{S} / \partial \sigma$ および $\partial \mathbf{S} / \partial \Phi$ を計算して上式に代入すれば, 次式を得る.

$$\dot{S}_{ij} = \Phi_{ik} \dot{\sigma}_{kj} + \sigma_{ik} \dot{\Phi}_{kj} \quad (2.23)$$

2.4. 異方性 Gurson の降伏関数と空孔の等方的成長を考慮した構成式

よって、Prager の適合の条件 (2.21) は、次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial F_{AG}}{\partial S_{ij}} \sigma_{ik} \dot{\Phi}_{kj} + \frac{\partial F_{AG}}{\partial \sigma_M} \dot{\sigma}_M + \frac{\partial F_{AG}}{\partial f} \dot{f} = - \frac{\partial F_{AG}}{\partial S_{ij}} \Phi_{ik} \dot{\sigma}_{kj} \quad (2.24)$$

上式より、定式化する必要があるのは $\dot{\Phi}$, $\dot{\sigma}_M$, \dot{f} の3つであることがわかる。

\dot{f} および $\dot{\sigma}_M$ については、Gurson の降伏関数と同様の議論から導出する。弾性ひずみによる母材の膨張を無視し、非圧縮性を仮定すれば、 \dot{f} は次式のようなになる。

$$\dot{f} = (1 - f) D_{kk}^p \quad (2.25)$$

次に、巨視的塑性仕事が全て母材でなされることから、次式を得る。

$$\sigma_{ij} D_{ij}^p = (1 - f) \sigma_M \dot{\varepsilon}_M^p \quad (2.26)$$

ε_M^p は母材の相当塑性ひずみである。ここで、母材の相当応力—相当ひずみ関係を表す量として、母材の塑性接線係数 h_M を導入する。

$$h_M = \frac{d\sigma_M}{d\varepsilon_M^p} \quad (2.27)$$

h_M は ε_M^p の関数として、母材の硬化挙動をよく表すような関数形を用いれば良い。式 (2.26), (2.27) より、 $\dot{\sigma}_M$ は、

$$\dot{\sigma}_M = h_M \frac{\sigma_{ij} D_{ij}^p}{(1 - f) \sigma_M} \quad (2.28)$$

となる。

最後に、損傷テンソルの時間変化率を定式化する。2.2.1 項で述べた空孔分布モデルにおいて、空孔体積分率 f は、楕円体半軸長さと空孔配列間隔を用いて次式のようなになる。

$$f = \frac{\pi a_1 a_2 a_3}{6 L_1 L_2 L_3} \quad (2.29)$$

これを損傷テンソルの主値を用いて書き換えれば、

$$f = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3}{\pi}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\det \boldsymbol{\Omega}}{\pi}} \quad (2.30)$$

を得る。上式の時間変化率をとれば、次のようになる。

$$\dot{f} = \frac{1}{2} f \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\Omega}^{-1}) \quad (2.31)$$

ただし、この式の導出には一般の2階テンソル \mathbf{A} のデターミナント $\det \mathbf{A}$ の微分に関する次の関係⁽⁶²⁾ を利用した。

$$\frac{D}{Dt} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \text{tr}(\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}) \quad (2.32)$$

第2章 提案する構成式と有限要素モデル化手法

D/Dt は物質時間微分である．式 (2.25) と (2.31) を比較すれば，損傷テンソルとストレッチングの塑性成分の関係が次式のように得られる．

$$\text{tr}(\dot{\Omega}\Omega^{-1}) = \frac{2(1-f)}{f} \text{tr} D^p \quad (2.33)$$

ここで，簡単のため空孔の成長は等方的，すなわち損傷テンソルの変化経路は応力・ひずみ履歴によらず，比例的であると仮定する．適当な比例係数 k を用いて $\dot{\Omega} = k\dot{\Omega}$ とし，式 (2.33) に代入して k を求めれば， $\dot{\Omega}$ は最終的に次式のように求められる．

$$\dot{\Omega} = \frac{2(1-f)}{3f} \text{tr}(D^p)\Omega \quad (2.34)$$

空孔の等方的成長の仮定はひずみ履歴依存性のある場合や，比較的変形の大きな場合，応力三軸度が小さな場合に対しては適用するのに限界があるが，単純な仮定から完全な形の構成式を導出することができる利点がある．

以上より，損傷効果テンソルの時間変化率は，式 (2.12) から次のように得られる．

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{ij} &= c\Phi_{ik}\dot{\Omega}_{kl}\Phi_{lj} \\ &= \Xi_{ij}D_{kk}^p \end{aligned} \quad (2.35)$$

ただし， Ξ は次式のようになる．

$$\Xi_{ij} = c \frac{2(1-f)}{3f} \Phi_{ik}\Omega_{kl}\Phi_{lj} \quad (2.36)$$

式 (2.25)，(2.28)，(2.35) を式 (2.24) に代入し， D^p について式 (2.20) を適用すれば，未定定数 Λ についての方程式が得られる．これを解いて法線則を書きなおせば，次式のようになる．

$$D_{ij}^p = \frac{1}{H} n_{ij} n_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (2.37)$$

ここで， \mathbf{n} ， H は以下のように表される．

$$n_{ij} = \frac{1}{2}(\Phi_{ik}m_{kj} + m_{ik}\Phi_{kj}) \quad (2.38)$$

$$m_{ij} = \frac{3}{2} \frac{S'_{ij}}{\sigma_M} + \alpha\delta_{ij} \quad (2.39)$$

$$H = \frac{h_M}{1-f} \left(\omega + \frac{hS_{kk}}{\sigma_M} \alpha \right)^2 - n_{kk} \{ \eta + \gamma\sigma_M(1-f) \} \quad (2.40)$$

$$\omega = \left(\frac{S_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 \quad (2.41)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} f \sinh \left(\frac{hS_{kk}}{2\sigma_M} \right) \quad (2.42)$$

2.4. 異方性 Gurson の降伏関数と空孔の等方的成長を考慮した構成式

$$\gamma = \cosh \left(\frac{hS_{kk}}{2\sigma_M} \right) \quad (2.43)$$

$$\eta = m_{ij}\sigma_{jk}\Xi_{ki} \quad (2.44)$$

一方で、ストレッチングの弾性部分 D^e については、空孔の影響を無視して等方 Hooke 則が成り立つとすれば、ヤング率を E 、ポアソン比を ν として、次式のように表すことができる。

$$D_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} \quad (2.45)$$

もちろん、弾性変形挙動にも空孔の影響は存在し、軟化や異方性が引き起こされる。一方で、本研究で扱うような数%程度の巨視的ひずみ領域では弾性変形への影響は塑性変形と比較して小さいため、簡単のために等方 Hooke 則を仮定している。さらに、ストレッチング D が

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^p \quad (2.46)$$

のように、弾性成分と塑性成分の和で表されるとすれば、最終的に以下の速度型構成式が得られる。

$$D_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{H}n_{ij}n_{kl}\dot{\sigma}_{kl} \quad (2.47)$$

上式を応力速度について解けば、Jaumann の応力速度 $\check{\sigma}$ とストレッチングの関係が次式のように与えられる。

$$\check{\sigma}_{ij} = L_{ijkl}D_{kl} \quad (2.48)$$

ここで、 L_{ijkl} は次式で与えられる。

$$L_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} \right\} - \frac{E}{1-2\nu} \frac{\bar{N}_{ij}\bar{N}_{kl}}{(1-2\nu)\frac{H}{E} + \frac{1+\nu}{1-2\nu}\bar{N}_{mn}\bar{N}_{mn} - \frac{\nu}{1-2\nu}\bar{N}_{mm}^2} \quad (2.49)$$

$$\bar{N}_{ij} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \left(n_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}n_{kk}\delta_{ij} \right) \quad (2.50)$$

2.5 構成式に対する熱力学的制約条件

GTN モデルや前節の構成式は、母材の非圧縮性を仮定し、幾何学的な考察から損傷変数の発展式を導出している。つまり、空孔体積分率や損傷テンソルは、現在の変形形状と1対1に対応すると仮定している。しかしながら、空孔の等方的成長が仮定できないような場合においては、損傷テンソルは変形の履歴に依存し、現在の変形状態からだけでは定まらない。よって、幾何学的な考察だけでは発展式を導くことはできず、何かしら力学的な考察を追加する必要がある。

一方で、系統的に構成式と内部変数の発展式を定式化する方法として、熱力学的な考察がよく用いられる。そこで本節では、ひずみ履歴に依存した空孔の3次元的な成長挙動を損傷テンソル発展式で定式化するための基礎として、構成式に対して与えられる熱力学的制約条件について述べる。なお、本節は Ziegler⁽⁶³⁾、北川⁽⁶⁴⁾、Lemaitre・Chaboche⁽⁶⁵⁾、村上⁽⁶⁶⁾の書籍を参考にしている。

2.5.1 Clausius-Duhem の不等式

熱力学第2法則を示す Clausius-Duhem の不等式の局所形は、一般に次式のように表される。

$$\boldsymbol{\sigma} : \text{grad } \boldsymbol{v} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) - \boldsymbol{q} \cdot \frac{\text{grad } T}{T} \geq 0 \quad (2.51)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力テンソル、 \boldsymbol{v} は速度、 ρ は質量密度、 ψ は Helmholtz 自由エネルギー密度、 T は絶対温度、 s はエントロピー密度、 \boldsymbol{q} は熱流束ベクトルである。微小変形の場合においては、ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ を用いて次式のように書ける。

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) - \boldsymbol{q} \cdot \frac{\text{grad } T}{T} \geq 0 \quad (2.52)$$

系の熱力学的状態を決定する状態変数は、外部から直接観察可能な外部変数と、直接観測することができない内部変数とに大別される。独立な外部変数としては、全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ と絶対温度 T を選ぶことができる。一方、内部変数については、材料の転位構造や損傷状態など構成式において考慮する現象に応じて適切に選ぶ必要がある。そのため、ここではこの内部状態変数の集合を $\chi_J (J = 1, 2, 3, \dots)$ とおく。このとき、Helmholtz 自由エネルギー密度 ψ は、外部変数と内部変数の関数として、

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \chi_k) \quad (2.53)$$

のように表すことができる。ここで、全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.54)$$

2.5. 構成式に対する熱力学的制約条件

のように、弾性成分 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ と $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ の和で表すことができるとする。Helmholtz 自由エネルギーに対する塑性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ の効果は、内部状態変数 χ_k を通じて表現できると考えれば、式 (2.53) は、

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, \chi_k) \quad (2.55)$$

と書きなおすことができる。

式 (2.55) の時間微分をとると、

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \chi_J} \dot{\chi}_J \quad (2.56)$$

となる。ただし、上式の右辺第 3 項においては、下添字 J について総和規約を拡張し、すべての内部状態変数の成分 χ_J について和を取るものとする。これを式 (2.52) に代入すれば、

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \chi_J} \dot{\chi}_J - \frac{\text{grad } T}{T} \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (2.57)$$

を得る。

式 (2.57) は任意の過程において成り立つことを利用し、均一温度場における弾性変形を考える。このとき内部状態は変化しないため、

$$\text{grad } T = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbf{0}, \quad \dot{\chi}_J = 0 \quad (2.58)$$

となり、式 (2.57) は次式のようになる。

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} \geq 0 \quad (2.59)$$

上式は任意の $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ および \dot{T} について成り立たなければならないことから、以下の弾性構成式と熱状態方程式が得られる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}, \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2.60)$$

上式が任意の熱力学的過程において成り立つと仮定し、式 (2.57) に戻せば、

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \chi_J} \dot{\chi}_J - \frac{\text{grad } T}{T} \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (2.61)$$

を得る。ここで、 $\dot{\chi}_J$ と \mathbf{q}/T の熱力学的共役力を、

$$A_J \equiv -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \chi_J}, \quad \mathbf{g} \equiv -\text{grad } T \quad (2.62)$$

と定義すれば、Clausius-Duhem の不等式は最終的に、次式のようになる。

$$\phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + A_J \dot{\chi}_J + \frac{\mathbf{g}}{T} \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (2.63)$$

第2章 提案する構成式と有限要素モデル化手法

ϕ は単位体積あたりの散逸であり，式(2.63)は散逸不等式と呼ばれる．ここで，材料の力学的挙動が温度勾配に依存しないものとするれば，散逸 ϕ は，力学的散逸 ϕ^m と熱的散逸 ϕ^t に分解して次式のようなになる．

$$\phi^m = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + A_J \dot{\chi}_J \geq 0 \quad (2.64)$$

$$\phi^t = \frac{\mathbf{g}}{T} \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (2.65)$$

2.5.2 散逸ポテンシャルと一般化流束の法線性

式(2.64)について，一般化力ベクトル \mathbf{X} と一般化流束ベクトル \mathbf{J} を，

$$\mathbf{X} \equiv \{\boldsymbol{\sigma}, A_J\} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{J} \equiv \{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{\chi}_J\} \quad (2.67)$$

と定義すれば，式(2.64)は以下のように書くことができる．

$$\phi^m = \mathbf{X} \cdot \mathbf{J} \geq 0 \quad (2.68)$$

ここで， $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ である平衡点の近傍においては， \mathbf{J} と \mathbf{X} の間に線形関係が成り立つと仮定する．すなわち，

$$J_\Gamma = L_{\Gamma\Delta} X_\Delta \quad (2.69)$$

とする．ここで，大文字のギリシャ文字の下添字については総和規約を拡張し，一つの項の中に同じ指標が繰り返されている場合においては， \mathbf{X} ， \mathbf{J} の全ての成分について和をとるものとする．このとき，散逸 ϕ は

$$\phi = X_\Gamma J_\Gamma = L_{\Gamma\Delta} X_\Gamma X_\Delta \quad (2.70)$$

と表される．ここで，

$$\varphi(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} L_{\Gamma\Delta} X_\Gamma X_\Delta \quad (2.71)$$

とおけば，流束 \mathbf{J} は φ を用いて以下のように導かれる．

$$J_\Gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial X_\Gamma} \quad (2.72)$$

$\varphi(\mathbf{X})$ が，以下のように表される場合を考える．

$$\varphi(\mathbf{X}) = \frac{\Lambda}{n+1} (F+1)^{n+1}, \quad F+1 = A_{\Gamma\Delta} X_\Gamma X_\Delta \quad (2.73)$$

2.6. 異方性 Gurson の降伏関数に基づいた異方損傷発展式の導出

ここで Λ , n はそれぞれ定数である。このとき、流束 \mathbf{J} は式 (2.72) より、

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}_\Gamma} = \Lambda(F+1)^n \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}_\Gamma} \quad (2.74)$$

となる。特に塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ については、

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \Lambda(F+1)^n \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.75)$$

と書くことができる。さらに、 $n \rightarrow \infty$ の極限值を考えれば、塑性ひずみ速度は次式のようなになる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \begin{cases} 0 & (F < 0) \\ \Lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & (F = 0) \\ \rightarrow \infty & (F > 0) \end{cases} \quad (2.76)$$

F を降伏関数をみなせば、 $F > 0$ の場合を除いて、上式は古典的な法線則が成り立つ塑性体の構成式と一致する。塑性変形中においては応力点が常に降伏関数上にある (Prager の適合の条件)、すなわち $F = 0$ であることを考えれば、 $F > 0$ の場合は除外される。ちなみに、 $n = 0$ の場合は粘弾性体の構成式となり、 n の値を適当に選べば非線形の粘弾性挙動が表される (64)。

以上をまとめると、熱力学的議論から流束 \mathbf{J} は次式のようなになる。

$$\mathbf{J} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.77)$$

これを具体的に書けば、

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\chi}_J = \Lambda \frac{\partial F}{\partial A_J} \quad (2.78)$$

となり、内部状態変数の発展則と古典的な法線則とが同時に導かれる。 φ や F はともに散逸ポテンシャルと呼ばれるが、本論文では便宜上、 F を散逸ポテンシャルと呼ぶ。

2.6 異方性 Gurson の降伏関数に基づいた異方損傷発展式の導出

本節では、異方性 Gurson の降伏関数を基礎として、2.5 節で示した熱力学的考察を行い、空孔の 3 次元成長を考慮した損傷発展式を導く。

2.6.1 Helmholtz 自由エネルギー関数

まず、系の熱力学的状態を記述する内部変数を選択する。硬化挙動としては、母材の等方硬化を仮定すれば、スカラー量である母材相当塑性ひずみ ε_M^p を選択することが適切であると思われる。次に、空孔分布形態を表す変数としては、異方性を考慮するため損傷テンソル Ω を導入する。空孔体積分率 f は、式 (2.25) が成り立つとすれば Ω の従属変数となるため、ここでは除外する。すなわち、内部状態変数の集合 χ_J は以下のようにおく。

$$\chi_J = \{\varepsilon_M^p, \Omega\} \quad (2.79)$$

このとき、Helmholtz 自由エネルギー密度 ψ は、

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, \chi_J) = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, \varepsilon_M^p, \Omega) \quad (2.80)$$

と書くことができる。さらに、等温過程を考えれば絶対温度 T を除いて、

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \varepsilon_M^p, \Omega) \quad (2.81)$$

となる。ここで、空孔の成長挙動のみに着目して考察するため、母材が加工硬化しない場合、すなわち弾完全塑性体について考えれば、 ψ に対する ε_M^p の効果はなくなり、

$$\chi_J = \{\Omega\} \quad (2.82)$$

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \Omega) \quad (2.83)$$

のように簡単化できる。

ここで、材料の損傷状態は弾性変形に対して影響を与えないものと仮定する。このとき、Helmholtz 自由エネルギー ψ は、

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \Omega) = \psi^E(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^D(\Omega) \quad (2.84)$$

のように、弾性成分 ψ^E と損傷発達に伴う成分 ψ^D とに分けて書くことができる。弾性成分 ψ^E は、Lamé の弾性定数 λ , μ を用いて、

$$\rho\psi^E(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_{kk}^e)^2 + \mu\varepsilon_{ij}^e\varepsilon_{ij}^e \quad (2.85)$$

とする。この場合、式 (2.60) から弾性構成式は、

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = \rho \frac{\partial \psi^E}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad (2.86)$$

$$= \lambda \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^e \quad (2.87)$$

2.6. 異方性 Gurson の降伏関数に基づいた異方損傷発展式の導出

となり．これは等方弾性体の構成式と一致する．一方で，損傷成分 ψ^D については，

$$\rho\psi^D(\boldsymbol{\Omega}) = \eta_1\Omega_{kk}^2 + \eta_2\Omega'_{ij}\Omega'_{ij} \quad (2.88)$$

のように，等方成分と偏差成分に分けて表す．ただし， $\Omega'_{ij} = \Omega_{ij} - (1/3)\Omega_{kk}\delta_{ij}$ は損傷テンソルの偏差成分， η_1 および η_2 はそれぞれの項の影響を調整するパラメータである．このとき，損傷テンソル速度に共役な力 \mathbf{B} を，

$$\mathbf{B} \equiv \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\Omega}} \quad (2.89)$$

と定義する．

式 (2.67) より，

$$B_{ij} = 2\eta_1\Omega_{kk}\delta_{ij} + 2\eta_2\Omega'_{ij} \quad (2.90)$$

となる．この定義は式 (2.62) と符号が異なるが，これは例えば相当塑性ひずみのような加工硬化を表す内部状態変数の発達に材料内部にエネルギーを蓄えるのに対し，損傷テンソルの発達は材料内部のエネルギーを開放すると考えられるためである．逆の符号で \mathbf{B} を定義した場合にも，同様の結論が得られることを注記する．

2.6.2 散逸ポテンシャルと構成式の具体形

空孔の成長は，巨視的塑性変形によって引き起こされ，散逸ポテンシャル F は降伏関数と一致するものと仮定する．降伏関数として，式 (2.13) の異方性 Gurson の降伏関数を利用すれば，式 (2.78) より，

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F_{AG}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \dot{\Omega}_{ij} = -\Lambda \frac{\partial F_{AG}}{\partial B_{ij}} \quad (2.91)$$

のように，塑性構成式と損傷発展式が得られる．

未定定数 Λ は Prager の適合の条件によって決定する．散逸ポテンシャルが一般化力 \mathbf{X} の関数であることを考慮すれば，これは次のように表される．

$$\dot{F}_{AG}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}) = \frac{\partial F_{AG}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F_{AG}}{\partial B_{ij}} \dot{B}_{ij} = 0 \quad (2.92)$$

さらに， \mathbf{B} が $\boldsymbol{\Omega}$ のみの関数であることを利用すれば，

$$\dot{B}_{ij} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial \Omega_{kl}} \dot{\Omega}_{kl} \quad (2.93)$$

第2章 提案する構成式と有限要素モデル化手法

となる．式 (2.91), (2.92), (2.93) より，未定定数 Λ は，次式のようになる．

$$\Lambda = \frac{\frac{\partial F_{AG}}{\partial \sigma_{ij}}}{-\frac{\partial F_{AG}}{\partial B_{kl}} \frac{\partial B_{kl}}{\partial \Omega_{mn}} \frac{\partial F_{AG}}{\partial B_{mn}}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (2.94)$$

これを式 (2.91) に戻せば，塑性構成式と損傷発展式は以下のように得られる．

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\frac{\partial F_{AG}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F_{AG}}{\partial \sigma_{kl}}}{-\frac{\partial F_{AG}}{\partial B_{mn}} \frac{\partial B_{mn}}{\partial \Omega_{op}} \frac{\partial F_{AG}}{\partial B_{op}}} \dot{\sigma}_{kl} \quad (2.95)$$

$$\dot{\Omega}_{ij} = \frac{\frac{\partial F_{AG}}{\partial B_{ij}} \frac{\partial F_{AG}}{\partial \sigma_{kl}}}{\frac{\partial F_{AG}}{\partial B_{mn}} \frac{\partial B_{mn}}{\partial \Omega_{op}} \frac{\partial F_{AG}}{\partial B_{op}}} \dot{\sigma}_{kl} \quad (2.96)$$

上式の各導関数を計算することで構成式が得られ，以下のようになる．

$$\frac{\partial F_{AG}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{2}{\sigma_M} n_{ij} \quad (2.97)$$

$$n_{ij} = \frac{1}{2} (m_{ik} \Phi_{kj} + \Phi_{ik} m_{kj}) \quad (2.98)$$

$$m_{ij} = \frac{3}{2} \frac{S'_{ij}}{\sigma_M} + \alpha \delta_{ij} \quad (2.99)$$

$$\alpha = \frac{h}{2} f \sinh \left(\frac{h S_{kk}}{2 \sigma_M} \right) \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial F_{AG}}{\partial \Omega_{ij}} = \frac{2}{\sigma_M} p_{ij} \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial F_{AG}}{\partial B_{ij}} = \frac{2}{\sigma_M} r_{ij} \quad (2.102)$$

$$r_{ij} = \frac{1}{2 \eta_2} \left\{ p_{ij} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) p_{kk} \delta_{ij} \right\} \quad (2.103)$$

$$p_{ij} = \frac{1}{2} \Phi_{ik} (\sigma_{kl} m_{lm} + m_{kl} \sigma_{lm}) \Phi_{mj} + \frac{1}{2} f \gamma \sigma_M \Omega_{ij}^{-1} \quad (2.104)$$

$$\gamma = 2 \cosh \left(\frac{h S_{kk}}{2 \sigma_M} \right) - 2f \quad (2.105)$$

$$-\frac{\partial F_{AG}}{\partial B_{ij}} \frac{\partial B_{ij}}{\partial \Omega_{kl}} \frac{\partial F_{AG}}{\partial B_{kl}} = \left(\frac{2}{\sigma_M} \right)^2 H \quad (2.106)$$

$$H = -\frac{1}{2 \eta_2} \left\{ p_{ij} p_{ij} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) p_{kk}^2 \right\}$$

Ω_{ij}^{-1} は損傷テンソルの逆テンソル Ω^{-1} の成分である．なお，上式の導出には以下の逆テンソルの微分公式⁽⁶⁷⁾を利用した．

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{A}} : \mathbf{C} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \quad (2.107)$$

2.6. 異方性 Gurson の降伏関数に基づいた異方損傷発展式の導出

\mathbf{A} , \mathbf{C} は一般の 2 階テンソルである。よって式 (2.95) および (2.96) は、次式のように書きなおすことができる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H} n_{ij} n_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (2.108)$$

$$\dot{\Omega}_{ij} = \frac{1}{H} r_{ij} n_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (2.109)$$

応力速度の形で弾塑性構成式を書く場合には、上式と弾性構成式 (2.87) の和をとり、応力速度について解けば良い。この導出過程は 2.6 節と同様であるため、省略する。

2.6.3 母材非圧縮条件の組み込み

式 (2.109) は、母材の非圧縮性を考慮することなく導かれている。そこで、母材非圧縮条件を構成式に組み込むことを考える。母材の非圧縮性を損傷テンソルとストレッチングの関係で示した式 (2.33) について、微小ひずみを適用すれば、次式が得られる。

$$\frac{1}{2} \frac{f}{1-f} \text{tr} \left(\dot{\Omega} \Omega^{-1} \right) = \text{tr} \dot{\varepsilon}^p \quad (2.110)$$

これに、式 (2.91) を代入して整理すると、次式のようになる。

$$\frac{1}{2} \frac{f}{1-f} \text{tr} \left(\frac{\partial F_{AG}}{\partial \mathbf{B}} \Omega^{-1} \right) = \text{tr} \left(\frac{\partial F_{AG}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (2.111)$$

さらに、式 (2.97) および (2.102) を代入し、 η_2 について解けば、次式が得られる。

$$\eta_2 = \frac{1}{4} \frac{f}{1-f} \frac{\left\{ p_{ij} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) p_{kk} \delta_{ij} \right\} \Omega_{ij}^{-1}}{n_{ll}} \quad (2.112)$$

この構成式において用いていたパラメータは、損傷の局所化を示す c 、静水応力成分の影響を示す h 、損傷発展に作用する η_1 , η_2 の 4 つであったが、上式で η_2 を置き換えれば、独立なパラメータは c , h , η_2/η_1 の 3 つになる。

ところで、式 (2.84) において Helmholtz 自由エネルギーの損傷成分は、損傷テンソルのみに依存すると仮定しているにも関わらず、式 (2.112) は \mathbf{n} を通じて応力に依存している。これは、式 (2.25) を考えれば、損傷テンソルの従属変数である f は塑性ひずみ速度と 1 対 1 対応する、すなわち損傷テンソル速度と塑性ひずみ速度が完全に独立ではないにも関わらず、独立変数のように扱っているためと考えられる。これについては、次節において詳しく考察する。また、この構成式に対して非線形な母材硬化挙動を適用すると、非常に式が複雑となる。これらの欠点はあるものの、この理論は比較的単純な仮定から導かれていながら異方的な損傷発展を導くことができている。

2.7 散逸不等式と散逸ポテンシャルに関する再考察

前節において導出した構成式は、空孔の分布形態による異方性と圧縮性、空孔のひずみ履歴に依存した異方的成長を表現することができる。しかしながら、これには以下のような問題点がある。

- 損傷テンソルを独立な内部状態変数とされているが、式 (2.25) および式 (2.30) を考えれば、損傷テンソルのデターミナントは巨視的ひずみ速度から一意に決定される。すなわち、完全に独立な変数ではない。これによって、パラメータ η_2 が応力に依存するといった熱力学的矛盾点があると考えられる。
- 比較的応力三軸度範囲の高い一定ひずみ比のものでは、パラメータ η_2/η_1 を一定とすることで損傷テンソルの変化をよく記述することができるが、単軸引張応力下においては η_2/η_1 の値を大きく変化させなければならない。これについては第4章における検証を参照されたい。 η_2/η_1 を、例えば応力三軸度の関数によって表現することが求められるが、これについても熱力学的に矛盾する。

このように、前節で導いた構成式はいくつかの限界がある。そこで本節においては、散逸不等式と散逸ポテンシャルの関数形を再度考察することにより、より精密で矛盾のない構成式を導くことを試みる。

2.7.1 多孔質材料における散逸不等式の損傷テンソルによる表現

多孔質材料は、母材が非圧縮性であっても、内部空孔の拡大により巨視的な体積変化を起こす。そのため、Rousselier⁽⁸⁾ は空孔を持つ金属材料の力学的散逸を、次式のように単位質量あたりの形で表している。

$$\phi' = \frac{\sigma}{\rho} : \dot{\epsilon}^p - \frac{1-f}{\rho} R \dot{\epsilon}_M^p \geq 0 \quad (2.113)$$

f は空孔の体積分率、 R は母材の等方硬化を表すスカラー内部状態変数、 ϵ_M^p は母材の相当塑性ひずみである。ここで、初期密度 ρ_0 と初期空孔体積分率 f_0 を用いれば、現在の密度 ρ と空孔体積分率 f について以下の関係が得られる。

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1-f}{1-f_0} \quad (2.114)$$

式 (2.114) を用いて式 (2.113) を整理すれば、散逸不等式は次式のように整理できる。

$$\phi'' = \frac{\sigma}{1-f} : \dot{\epsilon}^p - R \dot{\epsilon}_M^p \geq 0 \quad (2.115)$$

2.7. 散逸不等式と散逸ポテンシャルに関する再考察

次に、式 (2.115) の第 1 項を偏差成分と等方成分とに分け、以下のように書く．

$$\phi'' = \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{1-f} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \frac{\sigma_H}{1-f} \text{tr} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - R \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_M^p \geq 0 \quad (2.116)$$

これに対して、母材の非圧縮条件 (式 (2.25)) および式 (2.31) を適用すれば、散逸不等式は損傷テンソルを用いて次式のように表すことができる．

$$\begin{aligned} \phi'' &= \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{1-f} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \frac{\sigma_H}{2} \frac{f}{(1-f)^2} \boldsymbol{\Omega}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\Omega}} - R \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_M^p \\ &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\Omega}} - R \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_M^p \geq 0 \end{aligned} \quad (2.117)$$

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'$ 、 \mathbf{B} は $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ および $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ の共役力として、それぞれ次式のように定義している．

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \equiv \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{1-f}, \quad \mathbf{B} \equiv \frac{\sigma_H}{2} \frac{f}{(1-f)^2} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \quad (2.118)$$

2.7.2 散逸ポテンシャルと構成式の具体形

以上の考察から、熱力学的共役力 \mathbf{X} の成分は次式のようになる．

$$\{\mathbf{X}\} = \{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}', \mathbf{B}, -R\} \quad (2.119)$$

降伏関数 F はこれらの関数となるが、具体形として次式を考える．

$$\begin{aligned} F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}', \mathbf{B}, -R) &= \left(\frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 \\ &\quad + 2\eta_1 \cosh \left\{ \sqrt{\eta_2 \left(\frac{B_{kk}}{\sigma_M} \right)^2 + \eta_3 \left(\frac{B_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 + \eta_4 \frac{\tilde{\sigma}'_{ij} B'_{ij}}{\sigma_M^2}} \right\} - 1 \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$\tilde{\sigma}_{eq}^2 = \frac{3}{2} \tilde{\sigma}'_{ij} \tilde{\sigma}'_{ij} \quad (2.121)$$

$$B_{eq}^2 = \frac{3}{2} B'_{ij} B'_{ij} \quad (2.122)$$

$\sigma_M = \sigma_Y + R$ は母材の降伏応力、 σ_Y は母材の初期降伏応力、 \mathbf{B}' は \mathbf{B} の偏差成分、 $\eta_1 \sim \eta_4$ はパラメータである．具体的には、第 5 章における種々の応力状態における単位セルの有限要素解析結果から導いているが、詳細は後述する．Gurson の降伏関数を模した形としており、 $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ の場合には Mises 型の降伏関数に一致する．

第2章 提案する構成式と有限要素モデル化手法

塑性構成式と内部状態変数の発展式は、それぞれ次式のように得られる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = (1 - f)\dot{\Lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.123)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\Lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \quad (2.124)$$

$$\dot{\Omega}_{ij} = \dot{\Lambda} \frac{\partial F}{\partial B_{ij}} \quad (2.125)$$

$$\dot{\varepsilon}_M^p = -\dot{\Lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_M} \quad (2.126)$$

未定乗数 $\dot{\Lambda}$ は、次式の Prager の適合の条件から計算される。ここでは、簡便に計算を行うために F を σ, Ω, σ_M の関数とみなしている。

$$\dot{F}(\sigma, \Omega, \sigma_M) = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \Omega_{ij}} \dot{\Omega}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_M} \dot{\sigma}_M = 0 \quad (2.127)$$

σ_M が ε_M^p のみの関数であれば、 $\dot{\sigma}_M$ は母材の塑性接線係数 h_M を用いて以下のように書くことができる。

$$\dot{\sigma}_M = \frac{d\sigma_M}{d\varepsilon_M^p} \dot{\varepsilon}_M^p = h_M \dot{\varepsilon}_M^p \quad (2.128)$$

式 (2.127) に式 (2.125), (2.126), (2.128) を代入して整理すれば、 $\dot{\Lambda}$ は次式のように計算される。

$$\dot{\Lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{h_M \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_M} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial \Omega_{kl}} \frac{\partial F}{\partial B_{kl}}} \quad (2.129)$$

以上の各式における導関数を計算することで、塑性構成式と内部状態変数の発展式の具体

2.8. 異方性 Gurson の降伏関数における損傷発展式への塑性ひずみ速度の導入

形は以下のように得られる.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H} n_{ij} n_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (2.130)$$

$$\dot{\Omega}_{ij} = \frac{1}{(1-f)H} r_{ij} n_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (2.131)$$

$$\dot{\varepsilon}_M^p = \frac{1}{(1-f)H} \zeta n_{ij} \dot{\sigma}_{kl} \quad (2.132)$$

$$n_{ij} = \frac{\sigma_M}{2} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{1-f} \left\{ m_{ij} - \frac{1}{3} \left(m_{kk} - \frac{1}{2} \frac{f}{1-f} \Omega_{kl}^{-1} r_{kl} \right) \delta_{ij} \right\} \quad (2.133)$$

$$m_{ij} = \frac{\sigma_M}{2} \frac{\partial F}{\partial \tilde{\sigma}'_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\sigma}'_{ij}}{\sigma_M} + \frac{1}{2} \eta_4 \alpha \frac{B'_{ij}}{\sigma_M} \quad (2.134)$$

$$\alpha = 2\eta_1 \sinh \beta \quad (2.135)$$

$$\beta = \sqrt{\eta_2 \left(\frac{B_{kk}}{\sigma_M} \right)^2 + \eta_3 \left(\frac{B_{eq}}{\sigma_M} \right)^2} \quad (2.136)$$

$$r_{ij} = \frac{\sigma_M}{2} \frac{\partial F}{\partial B_{ij}} = \alpha \left\{ \frac{1}{4\beta} \left(2\eta_2 \frac{B_{kk}}{\sigma_M} \delta_{ij} + 3\eta_3 \frac{B'_{ij}}{\sigma_M} \right) + \frac{\eta_4}{2} \frac{\tilde{\sigma}'_{ij}}{\sigma_M} \right\} \quad (2.137)$$

$$p_{ij} = \frac{\sigma_M}{2} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{ij}} = \frac{1}{1-f} \left(m_{ij} - \frac{1}{3} m_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{2} \frac{1+f}{1-f} r_{kl} \Omega_{kl}^{-1} B_{ij} - B_{ik} r_{kl} \Omega_{lj}^{-1} \quad (2.138)$$

$$H = \frac{1}{1-f} \left(\frac{\sigma_M}{2} \right)^2 \left\{ h_M \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_M} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial \Omega_{ij}} \frac{\partial F}{\partial B_{ij}} \right\} = \frac{\zeta^2 h_M - p_{ij} r_{ij}}{1-f} \quad (2.139)$$

$$\zeta = -\frac{\sigma_M}{2} \frac{\partial F}{\partial \sigma_M} = \left(\frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\beta}{2} + \eta_4 \frac{\tilde{\sigma}'_{kl} B'_{kl}}{\sigma_M^2} \right) \quad (2.140)$$

構成式の弾性部分など，以降の導出は前節と同様であるため，省略する.

2.8 異方性 Gurson の降伏関数における損傷発展式への塑性ひずみ速度の導入

前節および前々節においては，熱力学的な制約条件に基づいて損傷発展式を導出することを試みた．一方で，例えば損傷共役力を用いて異方性 Gurson の降伏関数を表すことができなくなるなど，この制約条件によって生じる不都合もあった．そこで，本節では熱力学的制約条件からではなく，損傷テンソルの発展式そのものに塑性ひずみ速度といった変形の方角を組み込むことを考える．

2.8.1 スカラー関数による塑性ひずみ速度と損傷テンソルの影響の表現

具体的には、異方性 Gurson の降伏関数に対し、損傷テンソルの発展式を次式のように表す。

$$\dot{\Omega} = \xi_1(\mathbf{D}^p, \varepsilon_M^p)\Omega + \xi_2(\Omega, \varepsilon_M^p)\mathbf{D}^p \quad (2.141)$$

$\xi_1(\mathbf{D}^p, \varepsilon_M^p)$ および $\xi_2(\Omega, \varepsilon_M^p)$ は、それぞれ Ω 、 \mathbf{D}^p の影響を表すスカラー関数である。これを式 (2.33) に代入して整理すると、 $\xi_1(\mathbf{D}^p, \varepsilon_M^p)$ は次式のように表すことができる。

$$\xi_1(\mathbf{D}^p, \varepsilon_M^p) = \frac{2(1-f)}{3f} \text{tr} \mathbf{D}^p - \frac{1}{3} \xi_2(\mathbf{D}^p, \varepsilon_M^p) \text{tr} (\Omega^{-1} \mathbf{D}^p) \quad (2.142)$$

これを指揮 (2.141) へ戻し、 $\xi_2(\Omega, \varepsilon_M^p)$ の最も簡単な形として、 $\xi_2(\Omega, \varepsilon_M^p) = \xi_2 = \text{Const.}$ とすれば、 $\dot{\Omega}$ は次式のように得られる。

$$\dot{\Omega}_{ij} = \Theta_{ijkl} D_{kl}^p \quad (2.143)$$

$$\Theta_{ijkl} = \frac{2(1-f)}{3f} \Omega_{ij} \delta_{kl} + \xi_2 \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \Omega_{ij} \Omega_{kl}^{-1} \right) \quad (2.144)$$

以上より、損傷効果テンソルの発展式は次式のように得られる。

$$\dot{\Phi}_{ij} = \Pi_{ijkl} D_{kl}^p \quad (2.145)$$

$$\Pi_{ijkl} = c \Phi_{im} \Phi_{nj} \Theta_{mnkl} \quad (2.146)$$

2.8.2 構成式的具体形

塑性ひずみ速度の具体形は、Prager の適合の条件を考え、各導関数を計算することで以下のように得られる。

$$D_{ij}^p = \frac{1}{H} n_{ij} n_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (2.147)$$

$$n_{ij} = \frac{1}{2} (m_{ik} \Phi_{kj} + \Phi_{ik} m_{kj}) \quad (2.148)$$

$$m_{ij} = \frac{3}{2} \frac{S'_{ij}}{\sigma_M} + \alpha \delta_{ij} \quad (2.149)$$

$$\alpha = \frac{h}{2} f \sinh \left(\frac{h S_{kk}}{2\sigma_M} \right) \quad (2.150)$$

$$H = \frac{h_M}{1-f} \left(\omega + \frac{S_{kk}}{\sigma_M} \alpha \right)^2 - m_{ij} \sigma_{jk} \Pi_{kilm} n_{lm} - n_{kk} \gamma \sigma_M (1-f) \quad (2.151)$$

$$\omega = \left(\frac{S_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 \quad (2.152)$$

$$\gamma = \cosh \left(\frac{h S_{kk}}{2\sigma_M} \right) \quad (2.153)$$

以降の導出は、これ以前の理論と同様であるため省略する。

2.9 結言

本章では，構成式と解析手法について説明した．内容を以下に要約する．

1. 空孔が規則的に配列する場合と不規則な場合，3次元モデルと2次元モデルのそれぞれについて，モデル化手法を説明した．特に空孔が不規則に配列する場合には，ポロノイ領域分割法を用いている．
2. 空孔の配列形態を，損傷テンソルによってモデル化する．各方向における空孔の面積分率を成分としたテンソル量を用いることで，異方性を表現する．
3. 異方性 Gurson の降伏関数によって，初期降伏挙動の異方性を考慮することができる．内部状態変数の発展式については，最も簡単なモデルでは空孔の等方的成長を仮定して導出している．
4. 損傷テンソルの発展式を導出するため，Clausius-Duhem の不等式にもとづいた熱力学的制約条件を説明した．本理論を用いることで，構成式を体系的に導出することが可能となる．
5. 異方性 Gurson の降伏関数に対して熱力学的考察を適用することで，空孔の異方的成長を考慮した損傷テンソル発展式を導出した．
6. より厳密に熱力学的制約条件を満足する構成式として，散逸不等式についての再考察を行った．降伏関数についても，異方性を考慮可能なものを新たに導出した．
7. 現象論的ではあるが，スカラー量で損傷テンソルと塑性ひずみ速度の影響を重み付けすることで，損傷テンソルの発展式を導出した．簡便ながら，空孔の異方的成長を表すことができている．

第3章 局所的損傷と変形を考慮した有限要素解析への応用

3.1 緒言

本章においては、円孔を不規則に分布させた金属薄板を構造物の2次元理想化モデルとみなし、円孔の分布形態を損傷テンソルによって表現したモデルによる有限要素解析を行う。もちろん、実際の延性破壊過程において現れる空孔はより小さなスケールであるが、多孔平板を金属構造物のモデルとして扱う事によって、実験・観察を簡便に行っている。損傷テンソルで空孔分布形態を表現するため、要素分割は非常に単純な格子状でよく、要素数・節点数も大幅に削減され、計算時間の削減が見込まれる。本章では、便宜上このモデルをメゾスケールモデルと呼ぶ。比較対象として、直接円孔を分布させたモデルによる有限要素解析と、実際の金属薄板に円孔を分布させたモデルによる実験を行い、妥当性を検証する。

より厳密には3次元モデルを用いることが望ましいが、例えば実験においては金属材料中に閉曲面の空孔を任意の位置・形状で分布させることや、その変形挙動の計測が著しく困難になる。さらに、解析においてはモデルが複雑化することで検討に大きな時間と労力が必要となること、視覚的な後処理が困難であることから、今回は2次元モデルを採用した。

3.2 有限要素解析方法

3.2.1 各積分点における損傷変数の初期値

多孔平板を提案した構成式で有限要素解析するには、損傷変数の初期値を位置の関数によって決定する必要がある。そのモデル化手法について以下に説明する。2.2節および2.3節で説明した方法により、それぞれのポロノイ多角形について損傷テンソルの各成分と空孔体積分率が求められる。これらの損傷変数はポロノイ多角形内においては均一な値を持つものと仮定し、対応する有限要素の各積分点に損傷変数を割り当てる。つまり、図3.1に示すように同一の多角形内の積分点は全て同じ損傷変数をもつものとしている。これによって、モデルに直接空孔を分布させずに、少ない要素数での有限要素解析が可能となる。

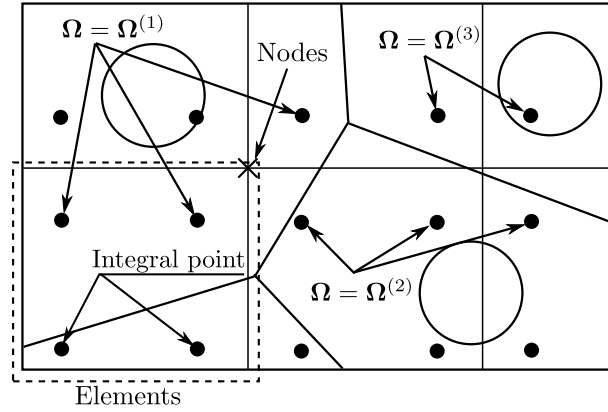


Fig. 3.1 Distribution of initial value of damage variable.

3.2.2 母材の相当応力-相当ひずみ関係

母材の材料としては、焼鈍した工業用純アルミニウム A1050P を想定する。母材内部における新規空孔の発生や成長・結合挙動は無視し、通常の Mises の降伏条件式に従う Prandtl-Reuss 型構成式を用いる。硬化挙動としては、等方硬化を仮定する。

単軸応力 σ —ひずみ ε 関係式としては、以下のものを用いる。

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & (\sigma \leq \sigma_Y) \\ \sigma_Y \frac{(\varepsilon+a)^n}{(\varepsilon_Y+a)^n} & (\sigma > \sigma_Y) \end{cases} \quad (3.1)$$

E はヤング率、 σ_Y は初期降伏応力、 n は加工硬化指数、 a は降伏オフセット値、 ε_Y は初期降伏ひずみである。全ひずみ ε は、弾性ひずみ ε^e と塑性ひずみ ε^p を用いて、

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (3.2)$$

$$= \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^p \quad (3.3)$$

と書くことができる。これを式 (3.1) に代入すると、 $\sigma > \sigma_Y$ において次式を得る。

$$\sigma = \sigma_Y \left(\frac{\frac{\sigma}{E} + \varepsilon^p + a}{\varepsilon_Y + a} \right)^n \quad (3.4)$$

$$\varepsilon^p = (\varepsilon_Y + a) \left(\frac{\sigma}{\sigma_Y} \right)^{\frac{1}{n}} - \frac{\sigma}{E} - a \quad (3.5)$$

材料定数は、単軸引張試験の結果を利用する。結果を表 3.1 に示す。多少の異方性は残っているが、精度検証には影響を与えない範囲と判断し、実際の解析には平均値を利用した。

Table 3.1 Material constants of annealed A1050P.

| Rolling direction $RD(\text{deg})$ | Young's modulus $E(\text{GPa})$ | Poisson's ratio ν | Initial yield stress $\sigma_Y(\text{MPa})$ | Work hardening coefficient n | Yield offset a |
|---------------------------------------|------------------------------------|--------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------|---------------------|
| 0 | 65.2 | 0.358 | 13.5 | 0.341 | 0.000129 |
| 45 | 65.7 | 0.345 | 13.5 | 0.328 | 0.000112 |
| 90 | 64.1 | 0.343 | 13.5 | 0.330 | 0.000119 |
| Ave. | 68.2 | 0.348 | 13.5 | 0.333 | 0.000120 |

3.2.3 解析対象

解析対象は、1辺が100mmの正方形領域に直径2.0mmの円形空孔を不規則に分布させた工業用純アルミニウムとした。このモデルでは、端面に近い位置ではボロノイ多角形を閉じた形で定義することが出来ないため、中央の60mm×60mmの正方形領域のみで結果を評価する。空孔の分布形態は図3.2に示すような3種類の分布形態を用意した。評価領域内に空孔を30個配置しており、平均的な空孔体積分率は0.0262である。それぞれのモデルは、評価領域内のボロノイ多角形の面積の分散値 v^2 の値によって分布の偏りを定量化しており、モデルAが最も偏りの少ないモデルで、モデルB、Cの順番に偏りが大きくなっている。

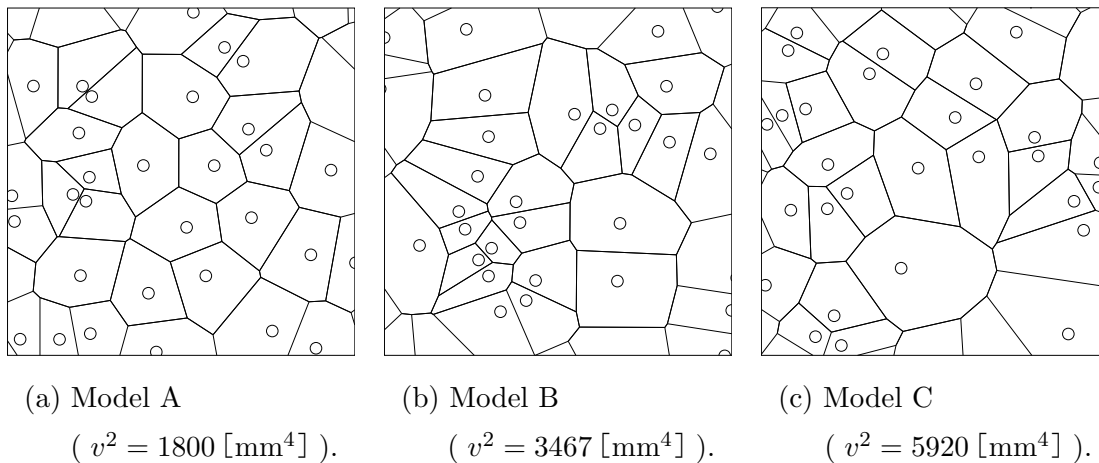
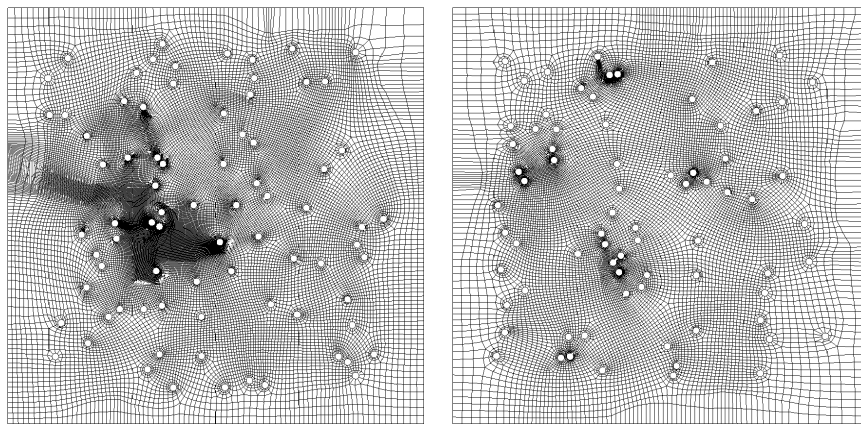


Fig. 3.2 Hall distribution and voronoi tessellation of models.

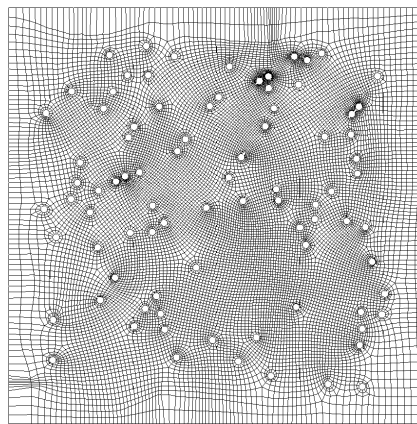
3.2.4 要素分割と境界条件

直接空孔を分布させたモデルの要素分割には，空孔の形状をよく再現できるよう，四節点四辺形要素を用いた．空孔近辺の応力集中を表現するため，空孔の円周方向には8分割，空孔間は4分割以上の分割を行っている．それぞれの要素分割を図3.3に，要素数と節点数をまとめたものを表3.2に示す．一方でメゾスケールモデルにおいては，単純な格子状の分割で良いことから，八節点四辺形要素を用いた．要素の形状は全て同じ大きさの正方形形状とし，ポロノイ多角形の平均的な面積 \bar{A}_v と要素の面積 A_e の比 \bar{A}_v/A_e を変化させて，要素サイズの影響を検討する．表3.3に \bar{A}_v/A_e と節点数，要素数の対応を示す．



(a) Model A.

(b) Model B.



(c) Model C.

Fig. 3.3 Mesh division of perforated models.

Table 3.2 Total number of nodes and elements for perforated model.

| Model | Nodes | Elements |
|---------|-------|----------|
| Model A | 30346 | 29486 |
| Model B | 23548 | 22679 |
| Model C | 17235 | 16448 |

Table 3.3 Total number of nodes and elements for mesoscopic model.

| \bar{A}_v/A_e | Nodes | Elements |
|-----------------|-------|----------|
| 1.2 | 341 | 100 |
| 4.8 | 1281 | 400 |
| 19.6 | 4961 | 1600 |
| 120.0 | 30401 | 10000 |

境界条件は、図3.4に示すようにモデルの左端、下端の x 方向変位、 y 方向変位をそれぞれ拘束し、モデルの上端および右端に荷重を負荷した二軸引張状態とした。単軸引張状態においては、 x 方向荷重を0としている。モデルの左端と右端、および下端と上端の境界条件が等価となるよう、モデル右端、上端における節点の x 方向変位、 y 方向変位はそれぞれ均一となるようにしている。

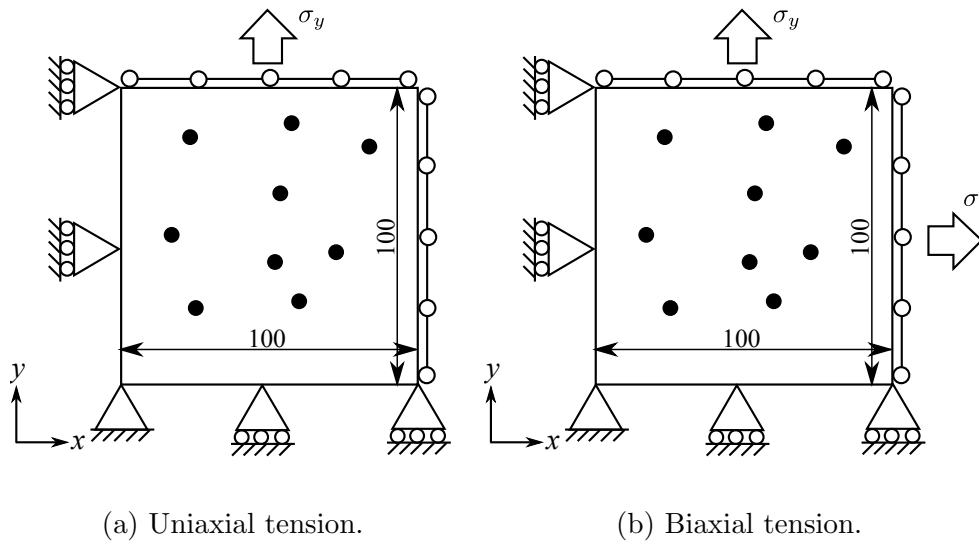


Fig. 3.4 Boundary condition for FEA of perforated sheet.

3.2.5 ソフトウェアと構成式の数値積分方法

本章における有限要素解析では、プリプロセッサに Abaqus CAE, ソルバは汎用陰解法コード Abaqus Standard Ver. 6.11.1, ポストプロセッサには Hyper View を用いた。異方性 Gurson の降伏関数は、ユーザーサブルーチン UMAT を用いて組み込んでおり、UMAT 内における速度型構成式の時間積分には Euler 法⁽⁶⁸⁾を用いている。

3.2.6 ドロネー三角形分割を用いた平均化ひずみの算出方法

ところで、異方性 Gurson の降伏関数は領域内の平均的な応力、ひずみを表しているため、直接空孔を分布させたモデルにおける微視的な応力、ひずみの分布を比較することは難しい。そのため、直接空孔を分布させたモデルについて、空孔中心を基点としたドロネー三角形領域分割を行い、各領域内において平均的なひずみを算出し、比較対象とする。

図 3.5 に示すように、ドロネー三角形の頂点をなす空孔の中心位置が変位した場合を考える。このとき、領域内の平均的なひずみ $\{\bar{\epsilon}\}$ は以下のように求めることができる。

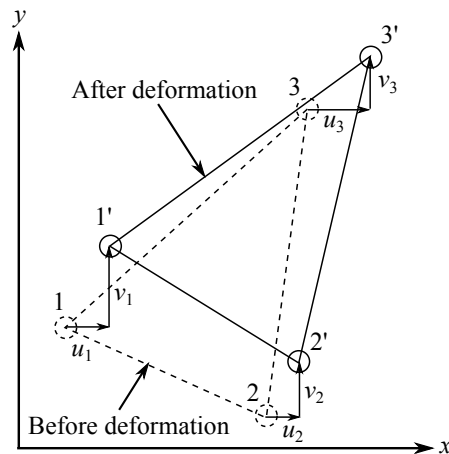


Fig. 3.5 Displacement of Delauney triangle.

$$\{\bar{\varepsilon}\} = [B]\{u\} \quad (3.6)$$

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \left\{ \bar{\varepsilon}_x \quad \bar{\varepsilon}_y \quad \bar{\varepsilon}_{xy} \right\}^T \quad (3.7)$$

$$\{u\} = \left\{ u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \right\}^T \quad (3.8)$$

$$[B] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

これによって三角形領域内の平均的なひずみが算出される。メソスケールモデルによる解析結果と比較する際には、三角形の図心に最も近い位置にある積分点におけるひずみの値と比較する。

3.3 解析手法の妥当性検証実験

有限要素解析は、多様な境界条件を与えられること、解析に要する時間や費用が実験と比較して短いことといった利点があるが、解が必ずしも実現象を表すことを保証しない。そのため、ここではモデル A について実際に金属薄板に円孔を分布させたダンベル型試験片を利用して単軸引張試験を行い、有限要素解析の妥当性を検証する。

3.3.1 実験方法

供試材として、工業用純アルミニウム A1050P を用いる。試験片形状は、平行部を除いて JIS Z 2201 で規定されている 5 号試験片と相似な形とした。平行部長さについては、試験機の都合上 200mm とした。試験片の図面を図 3.6、写真を図 3.7 に示す。試験片外形について、平行部と肩部は放電加工機、その他の部分はスケヤーマシンによって加工した。ところで、後藤⁽⁶⁰⁾の実験結果においては、再現性の低さが問題となっていた。この原因の一つとして、円孔の加工に卓上ボール盤とドリルを利用し、手作業で加工していた点が考えられる。そこで本実験においては、図 3.8 のように円孔を直径 2.0mm のエンドミルと NC フライス盤によって加工した。残留応力の除去を目的として、試験片は加工後に 360 ° 雰囲気中で 1h 保持後、炉冷することで焼鈍した。

3.3. 解析手法の妥当性検証実験

試験機は国際計測器株式会社製の SMH 方式万能試験機 KUTM-300 を利用し，荷重は試験機に付属の 300kN スケールのロードセルを用いた．試験機の外観を図 3.9 に示す．試験は変位制御にて行い，5.0mm の変位を 1.0mm/min の速度で与えた．

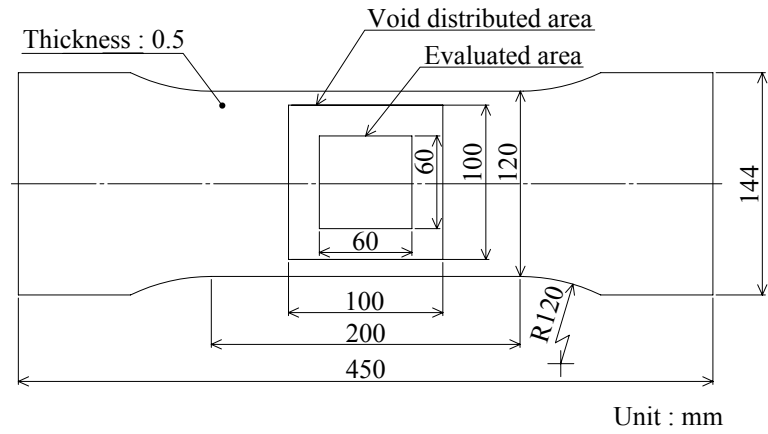


Fig. 3.6 Drawing of tensile test specimen.



Fig. 3.7 Photo of tensile test specimen.

第3章 局所的損傷と変形を考慮した有限要素解析への応用

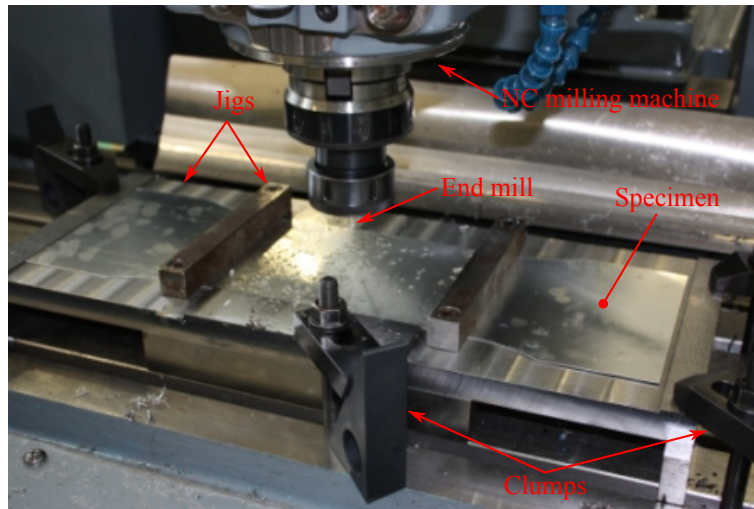


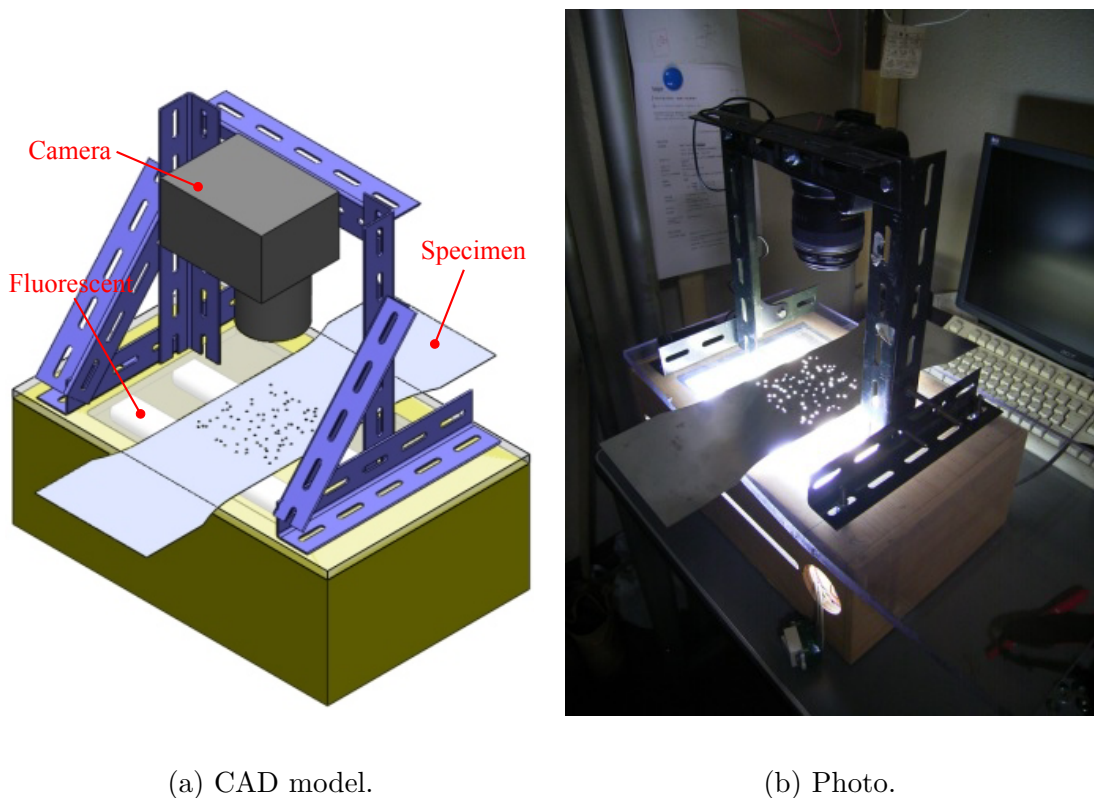
Fig. 3.8 Machining of specimen using NC milling machine and end mill.



Fig. 3.9 Photo of tensile test equipment.

3.3.2 測定方法

試験前後において、空孔位置をデジタルカメラによって撮影し、その画像から空孔中心位置の変位を算出する。カメラには、キヤノン株式会社製デジタル一眼レフカメラ EOS kiss X2 を用いた。レンズについても、同じくキヤノン株式会社製の EF-S60mm F2.8 マクロ USM を利用した。図 3.10 に示す装置を用いて試験片裏側から蛍光灯によって光を当て、試験片実質部と空孔とが区別しやすいようにした。



(a) CAD model.

(b) Photo.

Fig. 3.10 Measurement device.

一方で、小林⁽⁶⁹⁾は、試験前後においてセイコーエプソン株式会社のスキャナ GT-S360 を用いた空孔形状の計測を行なっている。このスキャナの解像度は1画素あたり 5.3×10^{-3} [mm] (4800dpi) であるのに対し、今回の計測方法の解像度は1画素あたり 8.2×10^{-3} [mm] である。さらに、小林の方法では試験片評価領域を一度に測定できるのに対し、今回の方法では一つ一つのドロネー三角形について撮影を行う必要があることを注記する。

撮影した画像は、まず一つ一つの画素について、図 3.11 のように輝度に応じて白、黒の2つに二値化する。具体的には、R, G, Bそれぞれの色について256階調で写真を読み込み、

$(R + G + B)/3$ の値が 128 以下であれば黒，それより大きければ白と分類した．二値化された画素のうち白のものを空孔部とみなし，白い画素の集合からなる点群の重心点を空孔中心位置とみなす．

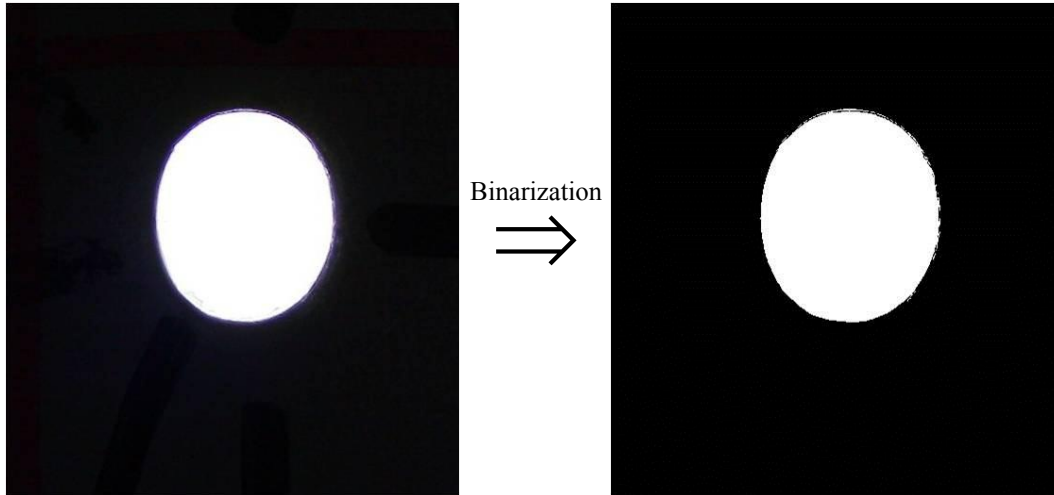


Fig. 3.11 Binarization of measurement result.

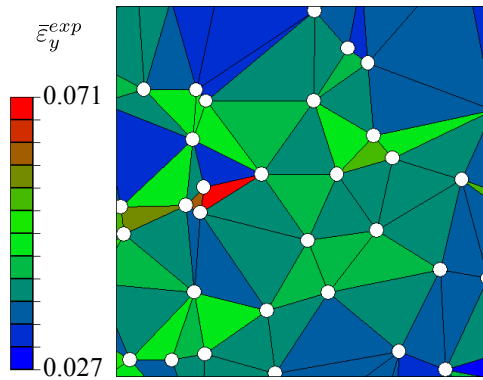
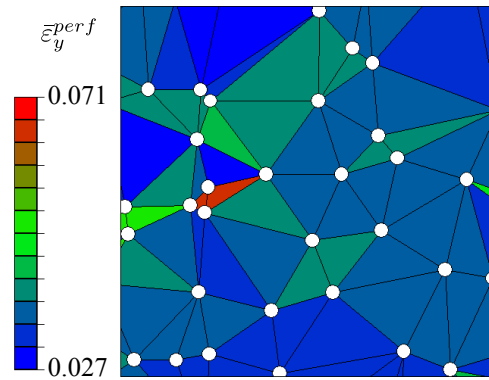
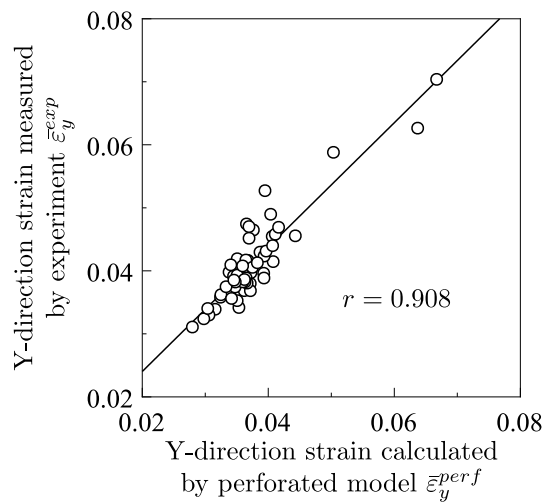
3.4 結果および考察

3.4.1 単軸応力下における実験結果と空孔を直接分布させた有限要素解析結果の比較

はじめに，モデル A について実験結果と直接空孔を分布させた有限要素解析結果を比較することで，直接空孔を分布させた解析の妥当性を検証する．試験片には直径 2.0mm のエンドミルを用いて円孔を形成したが，エンドミルの軸振れによって実際の空孔径はエンドミル直径よりも大きくなり，画像測定によれば空孔直径の平均値は 2.4mm であった．したがって本節では，有限要素モデルにおいても空孔直径を 2.4mm として計算した．また，有限要素解析の境界条件が実験と同様になるよう，上端の節点に対して y 方向に 4.2mm の強制変位を与えた．図 3.12 に，実験で得られた平均化 y 方向ひずみ $\bar{\epsilon}_y^{exp}$ の分布を示す．また，空孔を直接分布させたモデルの有限要素解析における平均化ひずみの計算結果 $\bar{\epsilon}_y^{perf}$ の分布を図 3.13 に示す．

両者のひずみの分布を比較すると，非常によく一致していることがわかる．ここで，定量的に妥当性を評価するため，これらの相関係数 r を求める．図 3.14 は，横軸に直接空孔を分布させたモデルの有限要素解析結果，縦軸に実験結果の平均化 y 方向ひずみをプロットし

たものである。相関係数は $r = 0.908$ と非常に高い値であり、直接空孔を分布させたモデルによる有限要素解析の妥当性が示された。このことから、以降は直接空孔を分布させたモデルとメゾスケールモデルとの、有限要素解析結果同士を比較する。

Fig. 3.12 Distribution of $\bar{\epsilon}_y^{exp}$.Fig. 3.13 Distribution of $\bar{\epsilon}_y^{perf}$.Fig. 3.14 Relation between $\bar{\epsilon}_y^{perf}$ and $\bar{\epsilon}_y^{exp}$.

3.4.2 単軸応力下における直接空孔を分布させたモデルとメゾスケールモデルの比較

単軸応力下において、直接空孔を分布させたモデルとメゾスケールモデルとを比較し、提案した構成式と計算手法の妥当性を検証する。以下で行った有限要素解析においては、 y 方向における応力 $\sigma_y = 50[\text{MPa}]$ を与えた。

通常の Gurson の降伏関数と異方性 Gurson の降伏関数の比較

メゾスケールモデルによる解析結果の例として、図 3.15 に、ポロノイ多角形の平均面積 \bar{A}_v と要素面積 A_e の比である要素面積比を、 $\bar{A}_v/A_e = 1.2$ としたときの y 方向ひずみ ε_y^{meso} の分布を示す。図には要素分割図に重ねてポロノイ領域分割と空孔分布を表示している。ここで、損傷の局所化を表すパラメータ c は、単位セルの縦横比といった空孔分布形態や、空孔体積分率と関連させて変化させることが望ましいと考えられる。モデル A についていくつかの値を検討した結果、 $c = 0.45$ において空孔を直接分布させたモデルとメゾスケールモデルのひずみの値がおおよそ一致した。本章で解析した他の 2 つのモデルについても、 $c = 0.45$ においてひずみがおおよそ一致したため、今回解析を行った空孔分布形態 ($v^2 = 1800 \sim 5920$, 初期空孔体積分率 $f_0 = 0.0262$) においては、この値が適切と考えられる。パラメータ h については、比較的応力三軸度の大きな領域について有効的なパラメータである。適切な値の検討は 3.4.3 項で行っているが、単軸引張応力下においては h の影響は小さいと考え、簡単のために $h = 1.0$ とした。

また、通常の Gurson の降伏関数を用いて解析した結果を図 3.16 に示す。初期の空孔体積分率の分布は、図 3.1 のように、異方性 Gurson の降伏関数における損傷テンソルの初期値と同様の方法で決定した。異方性 Gurson の降伏関数による結果を見ると、空孔の集中している場所で高いひずみを示していることがわかる。一方で、通常の Gurson の降伏関数を用いた解析では、全域でほぼ一定のひずみとなり、空孔の集中箇所などにおけるひずみの増加は見られない。Gurson の降伏関数は、空孔体積分率でのみ損傷を表現しており、異方性の影響を示すことができないためと考えられる。それぞれの降伏関数による結果について、先ほどと同様に空孔を直接分布させたモデルと比較し、ひずみの相関係数を計算した。前節で示した直接空孔を分布させたモデルによる結果を横軸に、メゾスケールモデルによる結果を縦軸に示した図を、図 3.17 に示す。Gurson の降伏関数では全く相関が得られていないのに対し、異方性 Gurson の降伏関数では $r = 0.504$ と、ある程度の相関を得ることができた。このことから、異方性 Gurson の降伏関数の優位性が示された。

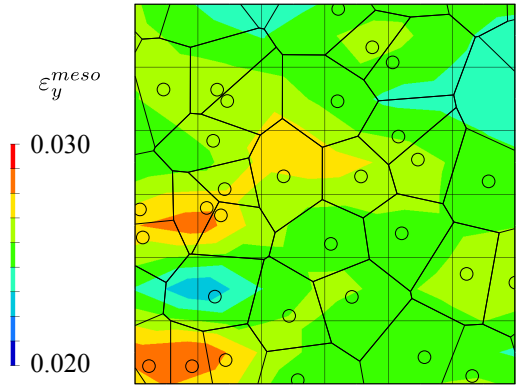


Fig. 3.15 Distribution of ε_y^{meso}
(Using anisotropic Gurson's
yield function).

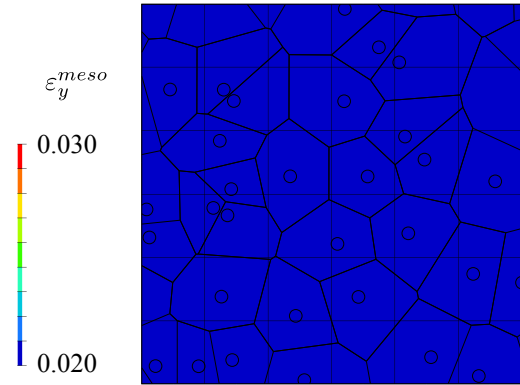


Fig. 3.16 Distribution of ε_y^{meso}
(Using Gurson's yield func-
tion).

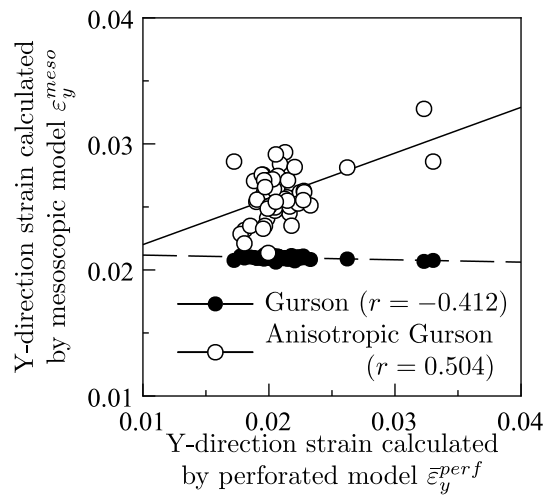


Fig. 3.17 Relation between $\bar{\varepsilon}_y^{perf}$ and ε_y^{meso} .

様々な分布形態における妥当性の評価

次に、分布形態を変更したモデルB、モデルCについて検討する。図3.18および図3.19は、それぞれモデルB、Cの結果として、直接空孔を分布させたモデルによる平均化ひずみの分布、メゾスケールモデルによるひずみの分布、両者の相関図を示したものである。要素サイズはともに $\bar{A}_v/A_e = 1.2$ としている。モデルBについても、モデルAと同様の結果がいえ。図3.18(b)を見ると、空孔の密集している2箇所を中心にひずみが集中しており、これは図3.18(a)のひずみ分布をよく表している。相関係数は $r = 0.516$ と、モデルAと同等程度の相関が得られた。一方で、モデルCについて図3.19を見ると、モデル右中央部のひずみの集中は一致しているが、相関係数は $r = 0.292$ と他の2つのモデルと比較して小さな値となった。モデルCはポロノイ多角形の面積の分散値が最も高く、分布の偏りが大きなモデルといえる。このようなモデルでは損傷変数の偏りも大きくなるため、より要素分割を細かくする必要があると考えられる。しかしながら、 $v^2 = 3500$ 付近の分散値であれば、ポロノイ多角形と同程度の大きさの要素面積 ($\bar{A}_v/A_e = 1.2$) でも $r = 0.5$ 程度の相関が得られることが示された。

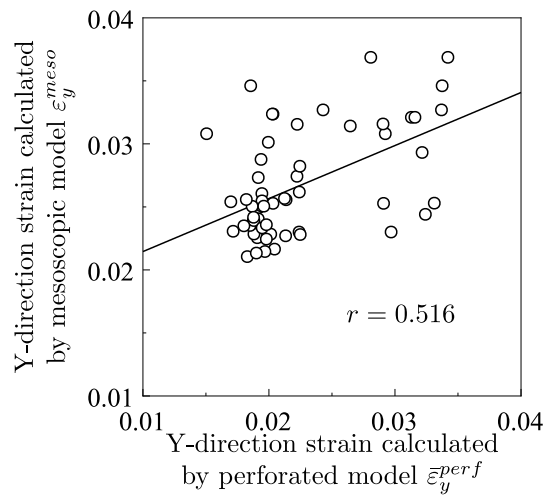
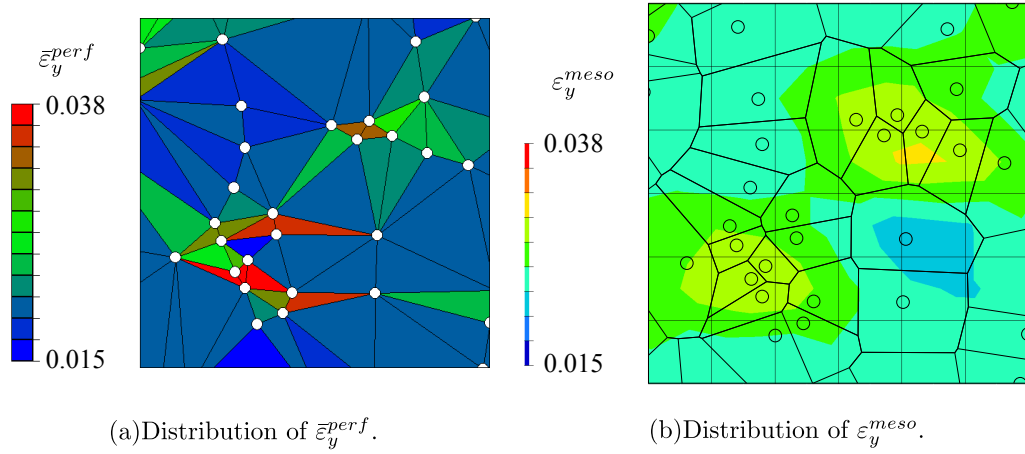
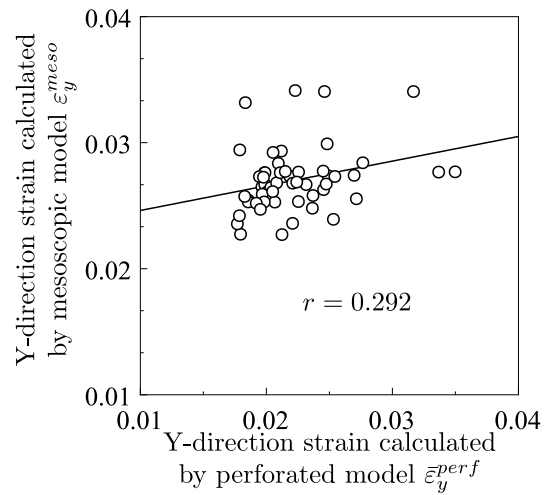
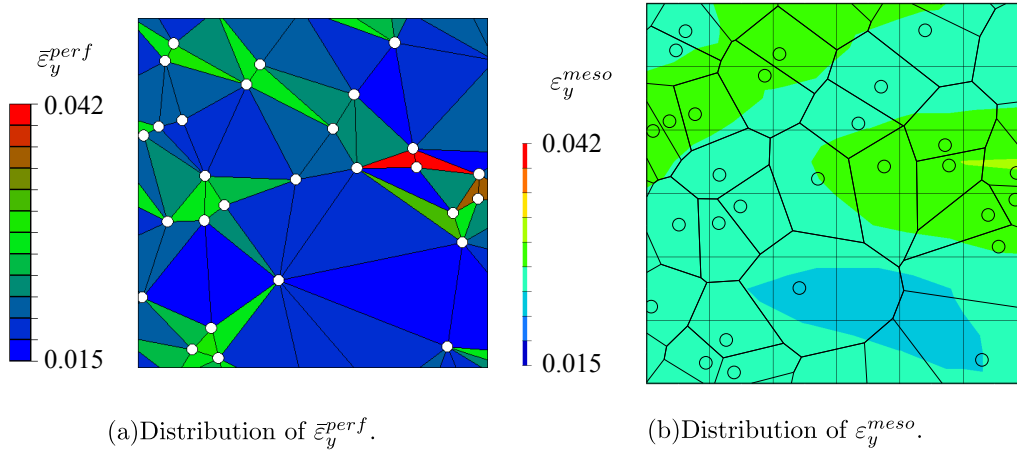


Fig. 3.18 Results of model B.



(c) Relation between $\bar{\epsilon}_y^{perf}$ and ϵ_y^{meso} .

Fig. 3.19 Results of model C.

要素分割の影響の検討

最後に、要素分割が結果に与える影響について検討する。図 3.20 は、モデル A について要素サイズを変更させて計算を行った結果である。要素分割を細かくしていくと、空孔の密集した場所における局所的な損傷の集中を表現できることがわかるが、同時にポロノイ境界付近にひずみが集中していくことがわかる (図 3.20(c) 中 A 部)。これは、損傷変数の初期値の定義がポロノイ境界において不連続であるためであると考えられる。

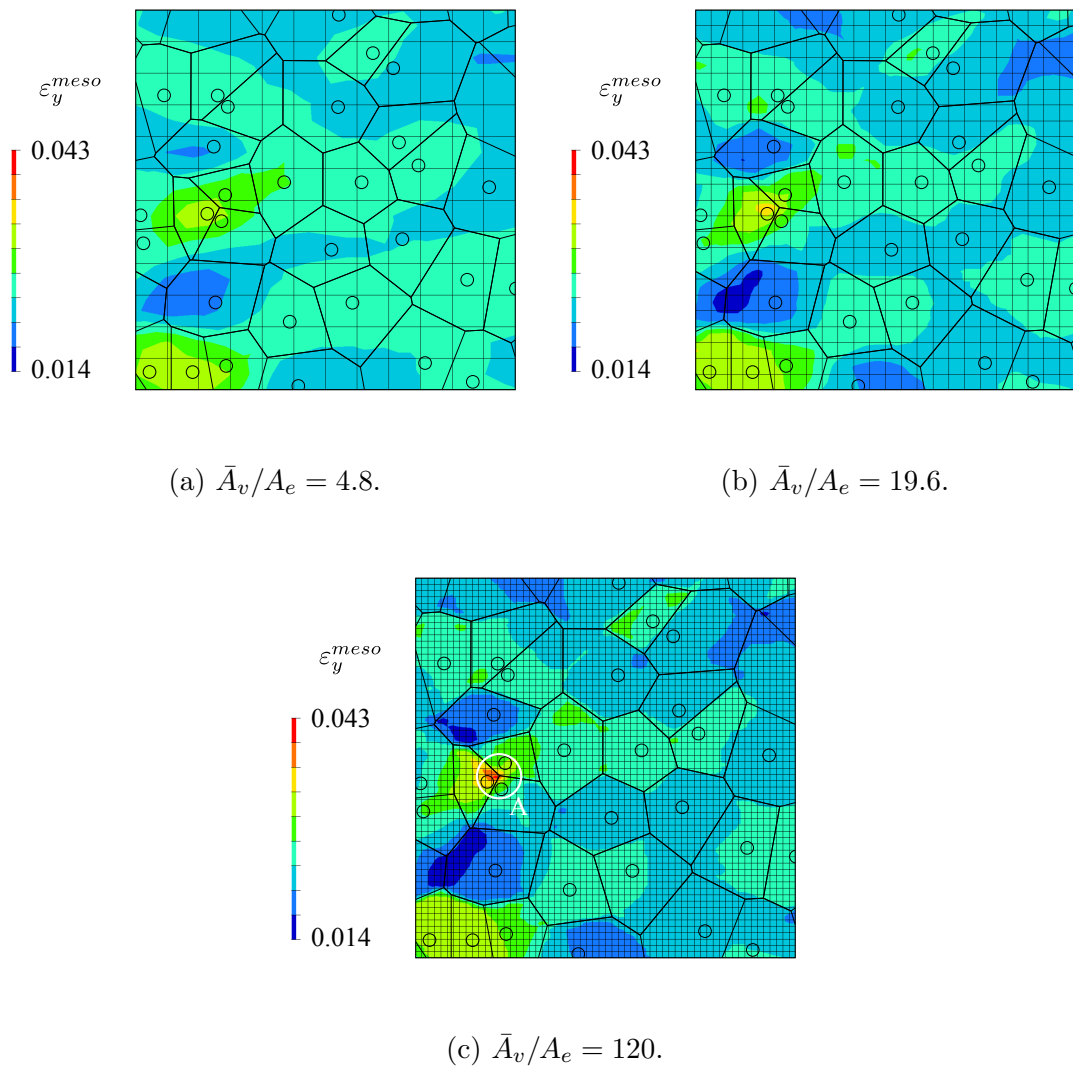


Fig. 3.20 Result of model A with various element size.

図 3.21 は、各モデルについて要素サイズを変化させながら計算を行い、相関係数をまと

第3章 局所的損傷と変形を考慮した有限要素解析への応用

めたものである。 $\bar{A}_v/A_e = 1.2$ ではモデル C の相関係数が他のモデルと比較して低かったが、 $\bar{A}_v/A_e = 3.0 \sim 3.5$ 程度では他のモデルと同等の相関係数を得ることができている。これは、要素分割を細かくしたことによって、局所的な損傷の集中を表現する事ができたためと考えられる。しかしながら、さらに要素分割を細かくしても、相関係数が必ずしも向上するような結果は得られていない。これは、前述したようにボロノイ境界において損傷変数の初期値が不連続となっているためと考えられる。損傷変数の初期値の定義方法を、連続的なものとする事で改善できると思われる。

最終的に、どのモデルにおいても $\bar{A}_v/A_e = 3.0$ 付近である程度の相関を得ることができしており、提案したモデルによって多孔平板の変形挙動の解析を行えることが示された。

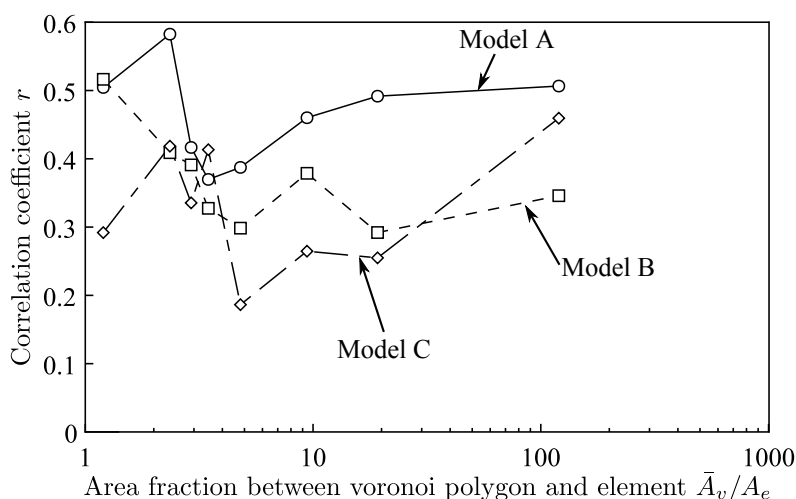


Fig. 3.21 Correlation coefficient of each models with various element size.

3.4.3 2軸応力下における直接空孔を分布させたモデルとメゾスケールモデルの比較

2軸応力状態における解析方法の妥当性を検証するため、3つのモデルに対して巨視的な応力比 $\bar{\sigma}_x/\bar{\sigma}_y$ の値を変化させて解析を行い、相関係数によって評価する。与えた応力の大きさは、巨視的な相当応力が $\sigma_{eq} = 50[\text{MPa}]$ となるようにしている。

パラメータ h の影響

要素面積比については前節における結果を踏まえて、モデル A・B は $\bar{A}_v/A_e = 1.2$ 、モデル C は $\bar{A}_v/A_e = 4.8$ とした。図 3.22 は、相関係数 r の値を巨視的な応力三軸度 $\bar{\sigma}_H/\bar{\sigma}_{eq}$ で整理したものである。

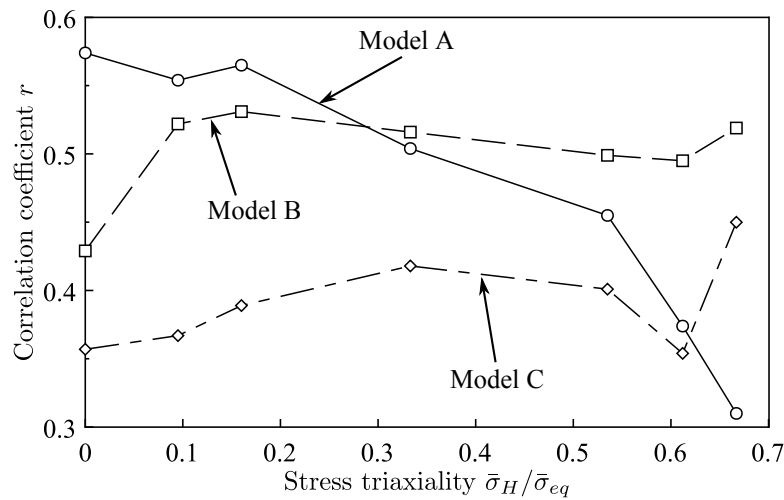


Fig. 3.22 Relation between stress triaxiality and correlation coefficient ($h = 1.0$).

モデル B, C については一定の傾向は見られないが, モデル A の結果を見ると, 応力三軸度が大きくなるにつれて相関係数が低下していることがわかる. この理由として, 異方性 Gurson の降伏関数中のパラメータ h の影響が考えられる. 異方性 Gurson の降伏関数において, 応力三軸度の影響は静水応力の影響を含んだ第 2 項で表現されているが, 静水応力成分 S_{kk} の影響を調整するパラメータ h はまだ検討されていない.

そこで, 最も静水応力項の影響が大きくなると思われる, 等 2 軸引張状態 ($\bar{\sigma}_H/\bar{\sigma}_{eq} = 2/3$) について, パラメータ h を変化させながら相関係数を求めた. 結果を図 3.23 に示す. モデル A の結果を見ると, $h = 0.8$ において相関係数が極大となっていることがわかる. 一方で, モデル B, C の結果はパラメータ h に対して比較的鈍感であることがわかるが, この理由については後述する. このため, パラメータ h の値は $h = 0.8$ が適切であると考えられる. しかしながら, この値は長岐⁽³⁸⁾ が 3 次的に空孔が規則的に分布したモデルの有限要素解析によって算出した値である $h = 1.4$ とは異なっている. これは 2 次元モデルと 3 次元モデルとの差異であると考えられる.

前述の結論に基づき, 再度パラメータ $h = 0.8$ として計算を行い, 応力三軸度によって整理した. 結果を図 3.24 に示す. 図 3.22 と比較すると, どのモデルも応力三軸度が 0.5 よりも小さい場合には大きな変化は見られない. 応力三軸度が 0.5 よりも大きな場合については, モデル A については応力三軸度の増加に伴う相関係数の低下が軽減されていることがわかる. モデル B についてはどの応力状態においても大きく変化しなかったが, モデル C については若干の改善が見られた. 全般的に, $h = 1.0$ の場合よりも相関係数が低下したモデル・条件は少なく, いくつかの条件において改善が見られたことから, パラメータを $h = 0.8$ とすることは妥当であると思われる.

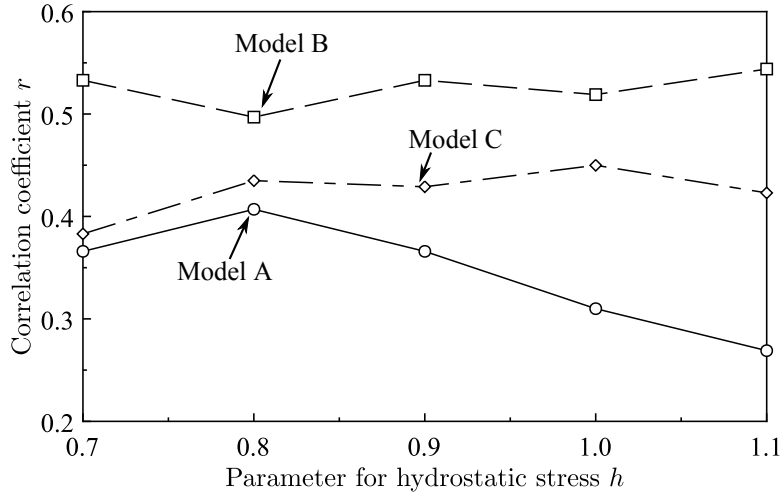


Fig. 3.23 Relation between parameter for hydrostatic stress h and correlation coefficient r (Under equibiaxial tension).

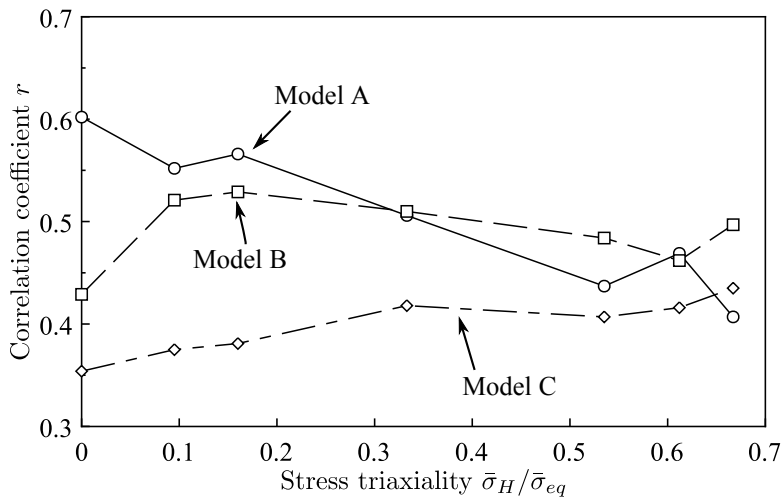


Fig. 3.24 Relation between stress triaxiality and correlation coefficient ($h = 0.8$).

空孔分布形態の不規則性とパラメータ h に対する依存性の関係

ところで、前述のようにパラメータ h を変化させても、モデル B の相関係数はあまり変化しないか、一定の傾向が見られていない。パラメータ h は、異方性 Gurson の降伏関数における S_{kk} の係数であることから、モデル B は S_{kk} の値が小さいことが原因として考えられる。そこで、モデル A とモデル B について、母材降伏応力で無次元化した実質応力テンソルの静水成分 S_H/σ_M ($S_H = \frac{1}{3}S_{kk}$) の分布を比較する。塑性変形が進行している間は、母材降伏応力 σ_M は母材における相当応力と一致するため、 S_H/σ_M は損傷の影響を考慮した応力三軸度とみなすことができる。そのため、 S_H/σ_M を便宜的に実質応力三軸度と呼ぶこととする。

図 3.25 は、モデル A, B について、等 2 軸引張状態における実質応力三軸度 S_H/σ_M の分布を示したものである。図から、比較的空孔間隔が広い場所では値が大きいのに対し、空孔の密集した場所では低い値となっていることがわかる。特に、モデル B の左下部においては値が小さくなっており、このような場所ではパラメータ h の影響は小さくなると思われる。

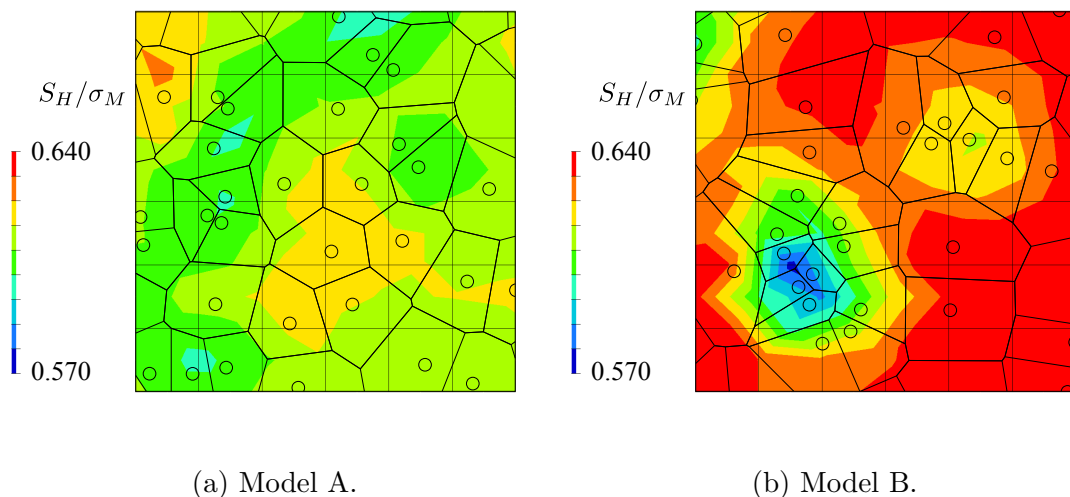


Fig. 3.25 Distribution of net stress triaxiality (Under equibiaxial tension).

以上より、空孔分布形態がより不均質なモデルのほうが h の影響を受けにくいと言えるが、図 3.22 と図 3.24 を比較すると、ポロノイ多角形の面積の分散値 v^2 が最も大きなモデル C のほうが、パラメータ h の影響を受けていることがわかる。また、小林⁽⁶⁹⁾は、本論文で扱ったものと同じ分布形態について実質相当応力を用いた局所的損傷状態の評価を行なっているが、実質相当応力と空孔の種々のひずみの相関係数が分散値に対して一定の傾向を持たないことを示している。このことから、空孔分布形態の不均質性を表す指標としてポロノイ

多角形の面積の分散値が不適当であることがうかがえ、妥当性を検証することが望ましい。

3.5 結言

本章では、Nagaki⁽⁴⁷⁾の提案した異方性 Gurson の降伏関数と空孔の等方的成長を仮定した構成式を利用して、多孔平板の有限要素解析を行った。得られた知見を以下にまとめる。

1. 空孔を直接的に分布させたモデルを用いた有限要素解析について、単軸応力下において実験的に妥当性を検証し、妥当性を確認した。
2. 通常の Gurson の降伏関数を用いた解析では、異方性を表現する事ができないため、空孔の集中箇所におけるひずみの増大を過小評価してしまう。一方で、異方性 Gurson の降伏関数を用いた解析は、これを表現する事で直接空孔を分布させたモデルとある程度的一致を示す。
3. ボロノイ多角形の面積の分散値がある程度小さな場合 ($v^2 < 4000$ [mm⁴] 程度) においては、要素面積はボロノイ多角形の面積の平均値と同等程度で解析をすることができる。
4. より分散値の大きな場合では、要素面積を小さくすることで精度を向上させることができるが、ボロノイ境界におけるひずみの集中によってある程度以上は向上しない。これを改善するためには、損傷変数の初期値を空間に対して連続的に定義することが必要であると考えられる。
5. 2軸応力状態においても、異方性 Gurson の降伏関数の妥当性が有限要素解析によって確認された。応力三軸度が大きく空孔分布形態が比較的均質な場合には、パラメータ h の影響が大きくなる。また、より確実に妥当性を検証するためには、実験的検討を行うことが望ましい。

第4章 異方性 Gurson の降伏関数に対する異方損傷発展則の妥当性検証

4.1 緒言

前章までで扱った，異方性 Gurson の降伏関数と空孔の等方的成長を仮定した構成式は，初期の空孔分布形態によってもたらされる異方性をよく表現できることが確認された．しかしながら，前述したようにこの理論は空孔の等方的成長を仮定しているため，比較的変形の大きな場合や非比例負荷経路においては限界がある．

2.6 節では，この問題を解決するために熱力学的考察に基づいて異方損傷発展則を導いた．本章では，この理論の妥当性を検証するため，2.2.1 項における空孔の規則配列モデルについて有限要素解析を行い，構成式の数値積分結果と比較することで妥当性を検証する．

4.2 単位セルの有限要素解析

本節では，単位セルの有限要素解析条件について述べる．プリプロセッサには HyperMesh，ソルバは汎用陰解法コード Abaqus Standard Ver. 6.11.1，ポストプロセッサには HyperView を用いた．

4.2.1 母材の材料特性

第3章と同様，母材は通常の弾塑性体とみなすことができると考える．ただし，ここでは弾完全塑性体の母材を考え，空孔の成長挙動のみに着目する．具体的には Mises の降伏条件式に従う Prandtl-Reuss 型構成式を用いる．母材降伏応力 σ_Y はヤング率 E で無次元化し， $\sigma_Y = E/1000$ とし，ポアソン比 ν は $\nu = 0.3$ とする．

4.2.2 解析対象と要素分割

解析対象は，2.2.1 項で説明した単位セルとする．後述する適切な境界条件を与えることによって，空孔が規則的に配列した擬似無限媒体を表現する．具体的な空孔分布形態として，

第4章 異方性 Gurson の降伏関数に対する異方損傷発展則の妥当性検証

簡単のため $a_1 = a_2 = a_3 = a$, $L_1 = L_2 = L_3 = L$ の等方的な初期配列を用いる. 初期空孔体積分率は $f_0 = 0.02$ とした ($a/L = 0.337$).

要素分割には, 空孔周りの形状再現性を重視して, 八節点六面体 1 次要素を用いた. 空孔の円周方向には 31 節点, 空孔からセル壁面に向かう方向には 21 節点配置し, 全体では節点数 15141, 要素数 13500 とした. 要素分割図を図 4.1 に示す.

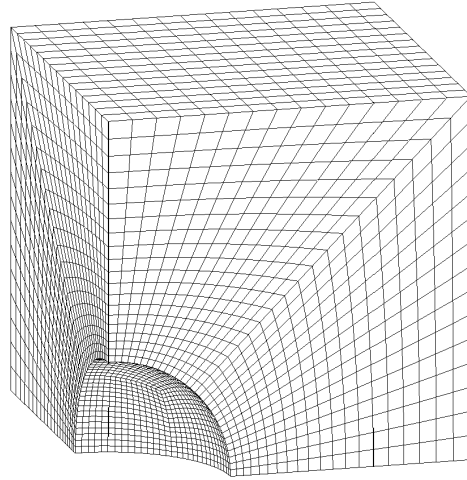


Fig. 4.1 Mesh division of unit cell.

4.2.3 境界条件

境界条件として, 3 軸方向に比例ひずみ経路を与える 3 軸ひずみ状態と, 単軸引張状態を表現したものの 2 つについて検討する.

3 軸ひずみ状態における境界条件の概略を図 4.2 に示す. 空孔のある面については, 面に対して垂直な方向の自由度を拘束する, 対称境界条件を与える. 空孔のない面については, その面に垂直な方向に強制変位を作用させることで, 平面を保ったまま変形させ, 巨視的な 3 軸ひずみ状態を表現する.

単軸応力状態における境界条件の概略図を図 4.3 に示す. 対称境界条件を与えるのは 3 軸ひずみ状態と同様であるが, 強制変位は X_3 方向面にのみ作用させる. 擬似無限媒体を表現するためには, すべての面が平面を保ちながらセルを変形させる必要があるが, X_1 , X_2 方向面の面に垂直な方向の自由度を, セル角部に定義した参照節点に従属させることでこれを満足させる.

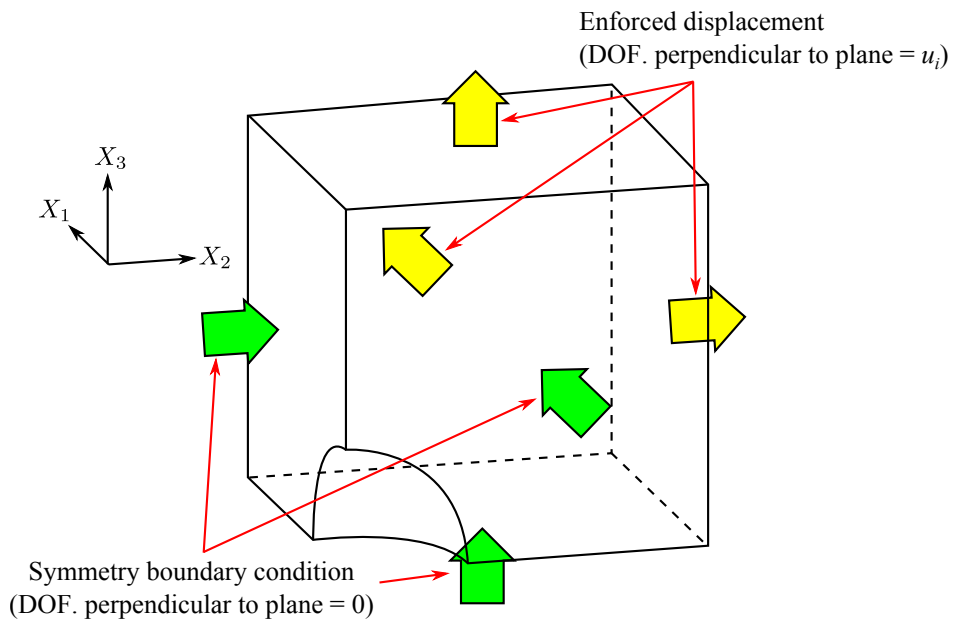


Fig. 4.2 Boundary condition for FEA of unit cell under triaxial stress.

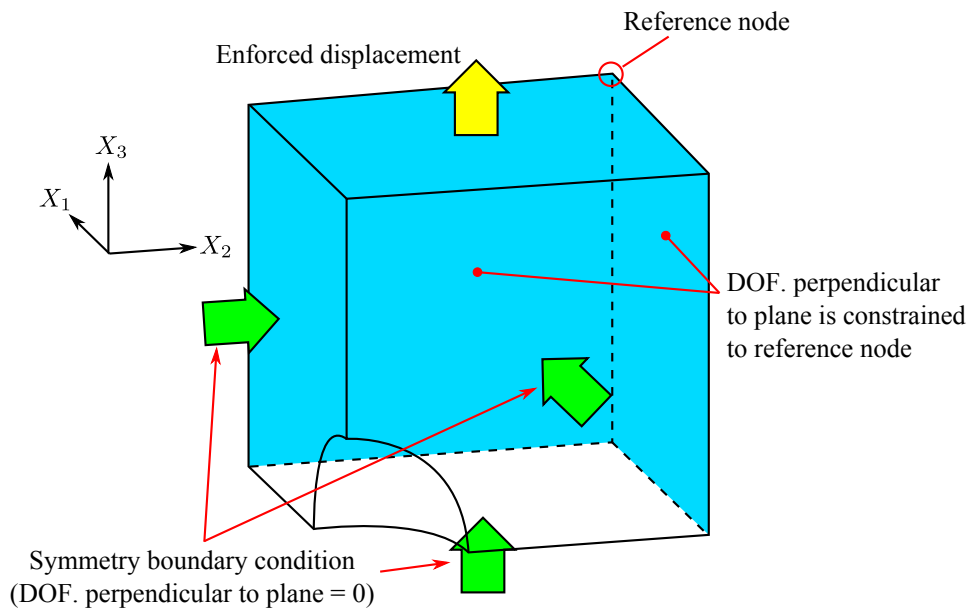


Fig. 4.3 Boundary condition for FEA of unit cell under uniaxial stress.

4.2.4 各量の導出方法

単位セルの有限要素解析結果から、巨視的な応力・ひずみおよび損傷テンソルを計算する方法について述べる。

セル壁面における力のつりあいを考えれば、 X_i 面上に作用する X_j 方向の巨視的な応力成分 σ_{ij} は、壁面における微視的な応力成分 τ_{ij} から、次式のように求められる。

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{A_i} \int \tau_{ij} dA_i \quad (i : \text{No sum.}) \quad (4.1)$$

A_i は、 X_i 方向面の面積である。実際の有限要素解析においては、セル壁面上の k 番目節点における節点反力の X_i 方向成分 $r_i^{(k)}$ を面上の全ての節点について足しあわせ、 A_i で割ることによって次式のように求めた。

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{A_i} \sum_k r_j^{(k)} \quad (4.2)$$

次にひずみについては、 A_i 面に与えた強制変位 u_i から次式のように求められる。

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} = \ln \left(1 + \frac{u_1}{L_{10}} \right) \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{22} = \ln \left(1 + \frac{u_2}{L_{20}} \right) \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{33} = \ln \left(1 + \frac{u_3}{L_{30}} \right) \quad (4.5)$$

L_{i0} は、2.2.1 項で述べた空孔間隔の初期値である。

最後に損傷テンソルについては、空孔周りの節点の座標を、次式の楕円体の式で最小 2 乗近似することで求める。

$$\left(\frac{X_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{X_2}{a_2} \right)^2 + \left(\frac{X_3}{a_3} \right)^2 = 1 \quad (4.6)$$

これによって求めた a_i と、与えた強制変位の値から求めた空孔間隔 L_i を式 (2.4) に代入することで、損傷テンソルの成分が計算できる。

4.3 構成式の数値積分

任意のひずみ状態に対して構成式を解析的に解くことは難しいため、理論値としては速度型構成式を数値積分したものを用いる。数値積分の流れ図を図 4.4 に示す。積分方法としては、計算時間よりもアルゴリズムの簡単さを優先し、Euler 法⁽⁶⁸⁾を用いた。

まず、時刻 $t = 0$ にを初期状態における時刻、 $t = 1$ を終了時の時刻とし、1 ステップあたりの時間増分を Δt とする。時刻 t から $t + \Delta t$ の間におけるひずみ増分 $\Delta \epsilon$ は、

$$\Delta \epsilon_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} \Delta t \quad (4.7)$$

となる。このステップが弾性過程 (降伏関数 $F(\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)) \leq 0$) の場合、応力増分は弾性剛性テンソル \mathbf{L}^e を用いて、

$$\Delta \sigma_{ij} = L_{ijkl}^e \Delta \epsilon_{kl} \quad (4.8)$$

となる。塑性域を含む場合は、まず降伏が開始する時刻を $t_c t + \beta \Delta t (0 \geq \beta \geq 1)$ と定義すれば、弾性応力増分 $\Delta \sigma^e$ と塑性応力増分 $\Delta \sigma^p$ はそれぞれ次のように求められる。

$$\Delta \sigma_{ij}^e = \beta L_{ijkl}^e \Delta \epsilon_{kl} \quad (4.9)$$

$$\Delta \sigma_{ij}^p = (1 - \beta) L_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \quad (4.10)$$

\mathbf{L} は弾塑性剛性テンソルである。本論文における計算では、計算精度向上のために塑性域においてサブ時間増分を適用している。

ここで、Mises の降伏関数など比較的単純な降伏関数であれば β は解析的に求められるが、異方性 Gurson の降伏関数から β を解析的に計算することは難しい。そこで、Newton 法を用いて β を反復計算し、 $|F_{AG}|$ が許容誤差 $F_{AG}^{error} = 0.001$ よりも小さくなるまで計算させた。 $|F_{AG}(\beta)| = 0$ の解は、次式に示す n についての漸化式を反復計算することで得られる。

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{F_{AG}(\beta_n)}{F'_{AG}(\beta_n)} \quad (4.11)$$

4.4 結果および考察

4.4.1 エネルギー散逸に関する考察

単位セル有限要素解析結果の例として、3 軸ひずみ状態の境界条件を用いて $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ の単軸ひずみ引張状態における解析を行った。巨視的な弾性特性の変化についても検討するため、変形途中において何度か負荷方向を反転させることで、除荷と再負荷を行った。結果として、巨視的な X_3 方向の応力 σ_3 とひずみ ϵ_3 の関係を図 4.5 に示す。また、図 4.5 中の A~D 点における塑性域の進展を図 4.6 に示す。

巨視的な応力はセルの一部が降伏を開始するとわずかに曲がり始め、塑性域が充分進展したところで極大値をとり、その後は減少していくことがわかる。このような応力の減少は、空洞の成長に伴う有効断面積の減少として説明することができる。ここで、B 点では比較的

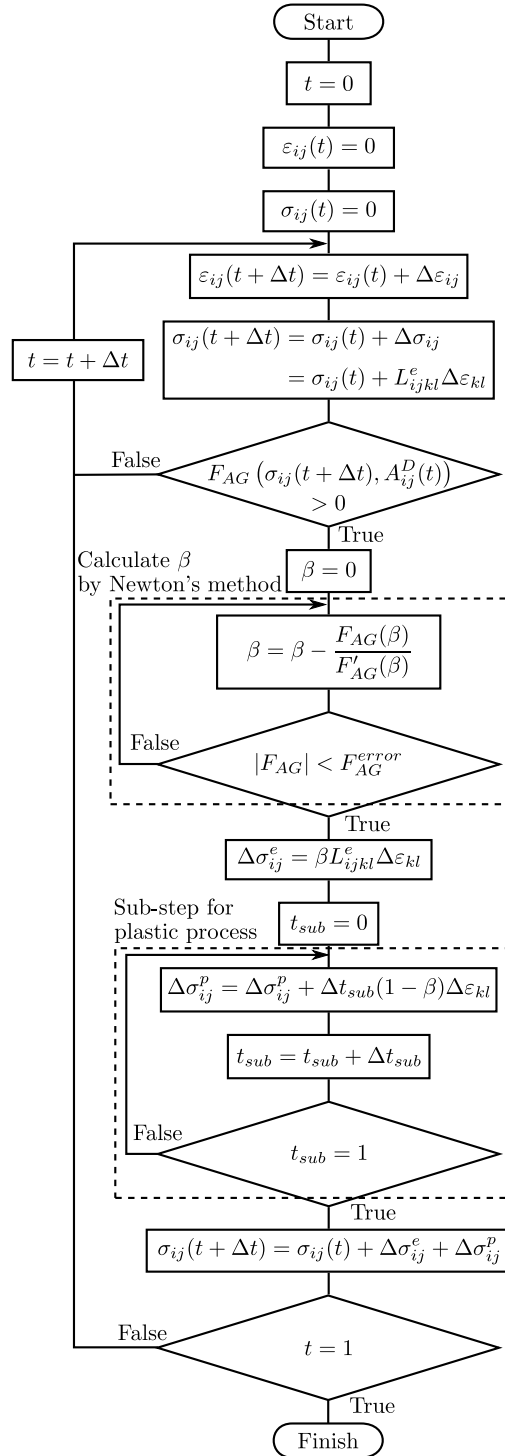


Fig. 4.4 Flow chart of numerical integration of presented constitutive equation.

セル全体にわたって塑性域が進展しているのに対し、C点、D点においては空孔近傍に集中していることがわかる。これは Bensergera⁽¹⁴⁾の考察とよく一致しており、散逸ポテンシャルを考察する上で興味深い。

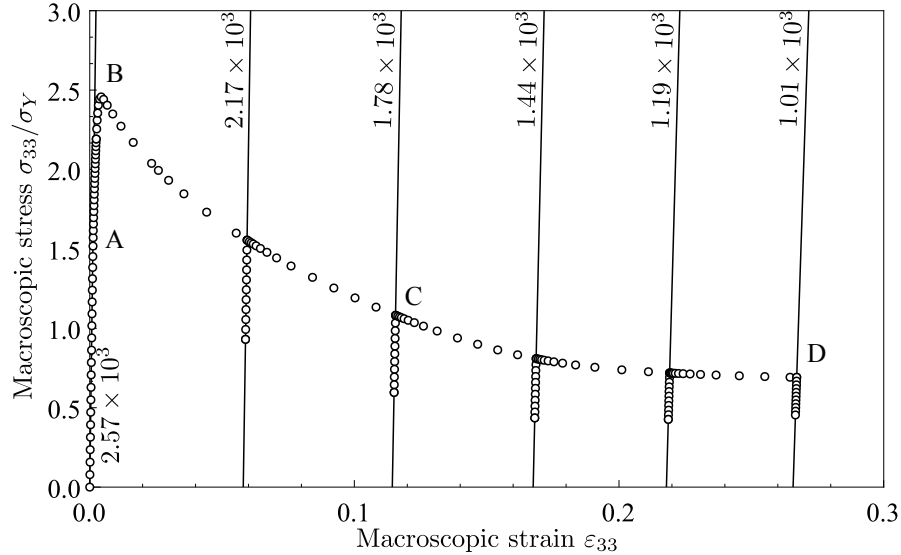


Fig. 4.5 Comparison of energy dissipation by growth of void in elastic and plastic region.

ところで、単軸ひずみ引張下においては X_1 , X_2 方向面は変位せず、これらの面に作用する応力 σ_{11} , σ_{22} は仕事をしない。そのため、図 4.5 の応力—ひずみ線図と横軸とがなす面積によって、エネルギー散逸の考察を行うことができる。図中の直線は、各除荷曲線に対して最小 2 乗近似したものであり、傾きを併記している。空孔の成長とともに、弾性特性を表す近似直線の傾きも減少していることがわかる。

ここで、図 4.7 に単軸引張状態における空孔を有する材料のエネルギー散逸の概略図を示す。はじめは、原点 O から初期ヤング率 E_0 の傾きで応力が上昇していき、点 A の降伏点に達する。降伏後は、転位構造変化により加工硬化で応力は再び上昇していき、点 B に達する。このとき、材料には転位構造変化に伴うエネルギーが蓄積される。除荷時においても、ヤング率は初期から変化せずに傾き E_0 のまま減少し、最終的に C 点に到達する。一方で空孔のある材料の場合、降伏後は転位構造変化に伴う加工硬化と、損傷の発達に伴う軟化の影響が組み合わさった状態となるため、空孔のない材料よりも応力は小さい値となり、点 D に達する。巨視的なヤング率も空孔の成長に影響を受けるため、初期ヤング率 E_0 よりも小さな傾き $E(\Omega)$ で減少し、C 点に到達する。このような弾性定数の減少に伴って、一部の弾性ひずみエネルギーが開放される。

図 4.5 と図 4.7 を比較すると、弾性ひずみエネルギーによって開放されるエネルギーよりも、塑性域における空孔の成長による軟化のほうが効果が大きいことがわかる。早川・村上⁽²⁷⁾

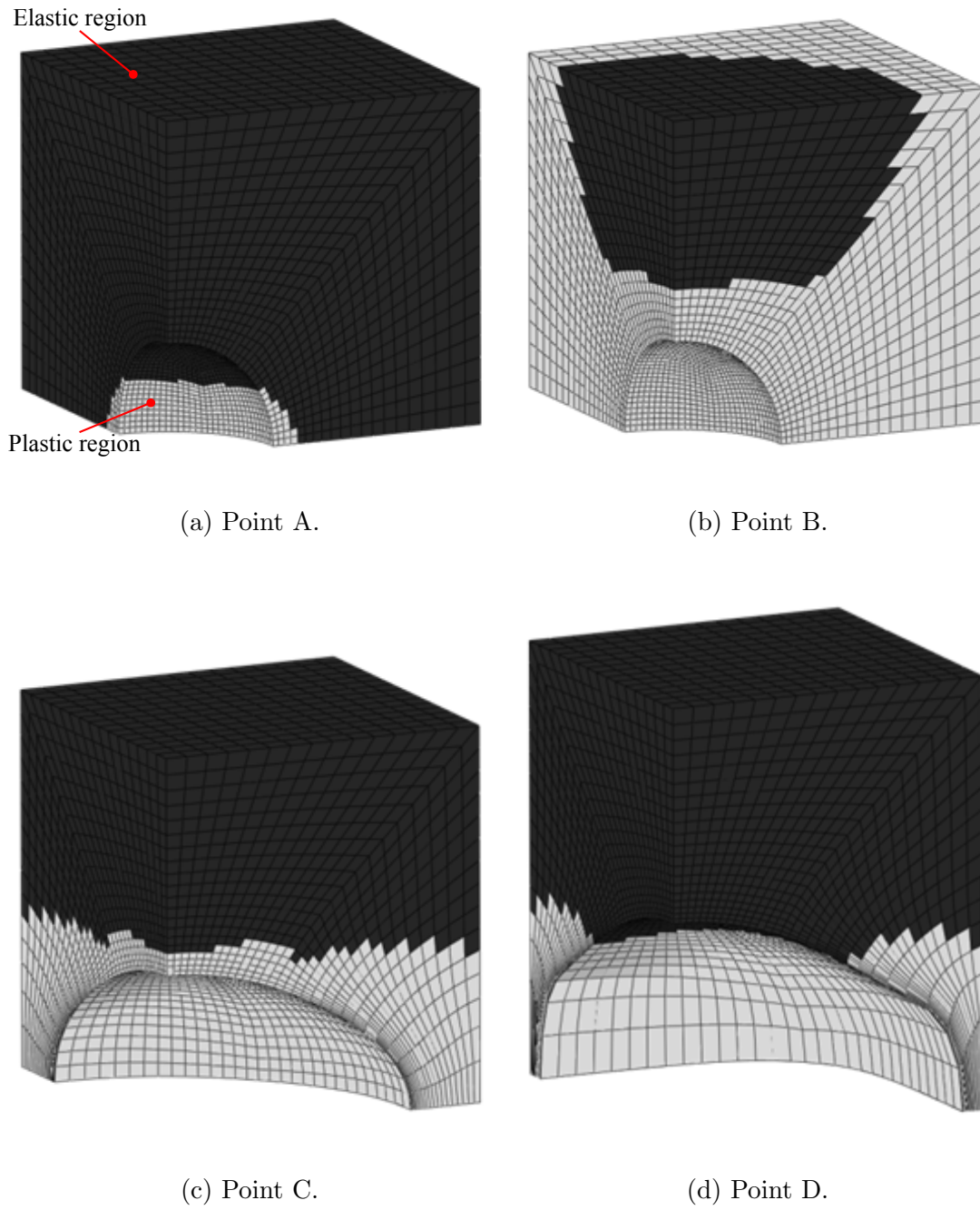


Fig. 4.6 Progress of plastic region.

は、損傷の発達によって散逸するエネルギーは、この弾性特性の変化に伴って開放される弾性ひずみエネルギーが支配的であると考え、損傷テンソルの発展式を導いているが、今回のような損傷が発達した材料や、延性が大きく空孔の成長が無視できない材料には不適切であると考えられる。以上から、式 (2.84) における Helmholtz 自由エネルギーの弾性部分と塑性部分への分解 ($\psi = \psi^E(\epsilon^e) + \psi^D(\Omega)$) は、妥当であると思われる。

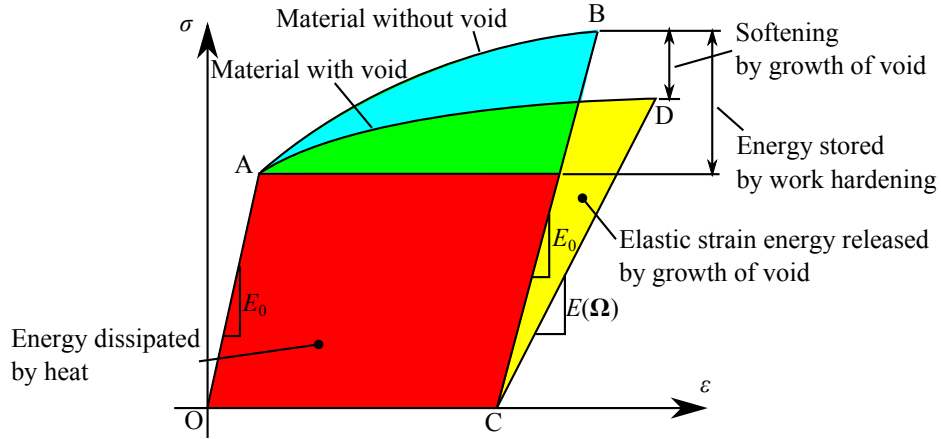


Fig. 4.7 Schematic representation of energy dissipation with and without void.

4.4.2 空孔形状の楕円体近似の妥当性

本論文においては、損傷テンソルの成分を空孔形状の楕円体近似結果から導出する。また、空孔体積分率と損傷テンソルの関係式 (2.30) は、空孔形状が楕円体であることを仮定して導出されている。本節では、前節と同様に単軸ひずみ引張状態下において行った有限要素解析結果について、空孔形状を楕円体で最小 2 乗近似することの妥当性を検証する。

図 4.8 は、初期空孔配列間隔 L_0 で無次元化した空孔近傍節点の座標 x_i/L_0 を、引張方向ひずみ ϵ_{33} の値で整理したものである。図中の赤い実線は、最小 2 乗近似によって求めた近似楕円体である。両者を比べると、比較的変形が小さな場合においては精度よく楕円体によって近似できていることがわかる。しかしながら、ひずみが大きくなると空孔は直方体状に変形していることがわかる。

この楕円体近似の精度を定量的に評価するため、楕円体近似の誤差 U を次式のように定義する。

$$U = \frac{1}{n} \sum_k \left| \left(\frac{x_1^{(k)}}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2^{(k)}}{a_2} \right)^2 + \left(\frac{x_3^{(k)}}{a_3} \right)^2 - 1 \right| \quad (4.12)$$

第4章 異方性 Gurson の降伏関数に対する異方損傷発展則の妥当性検証

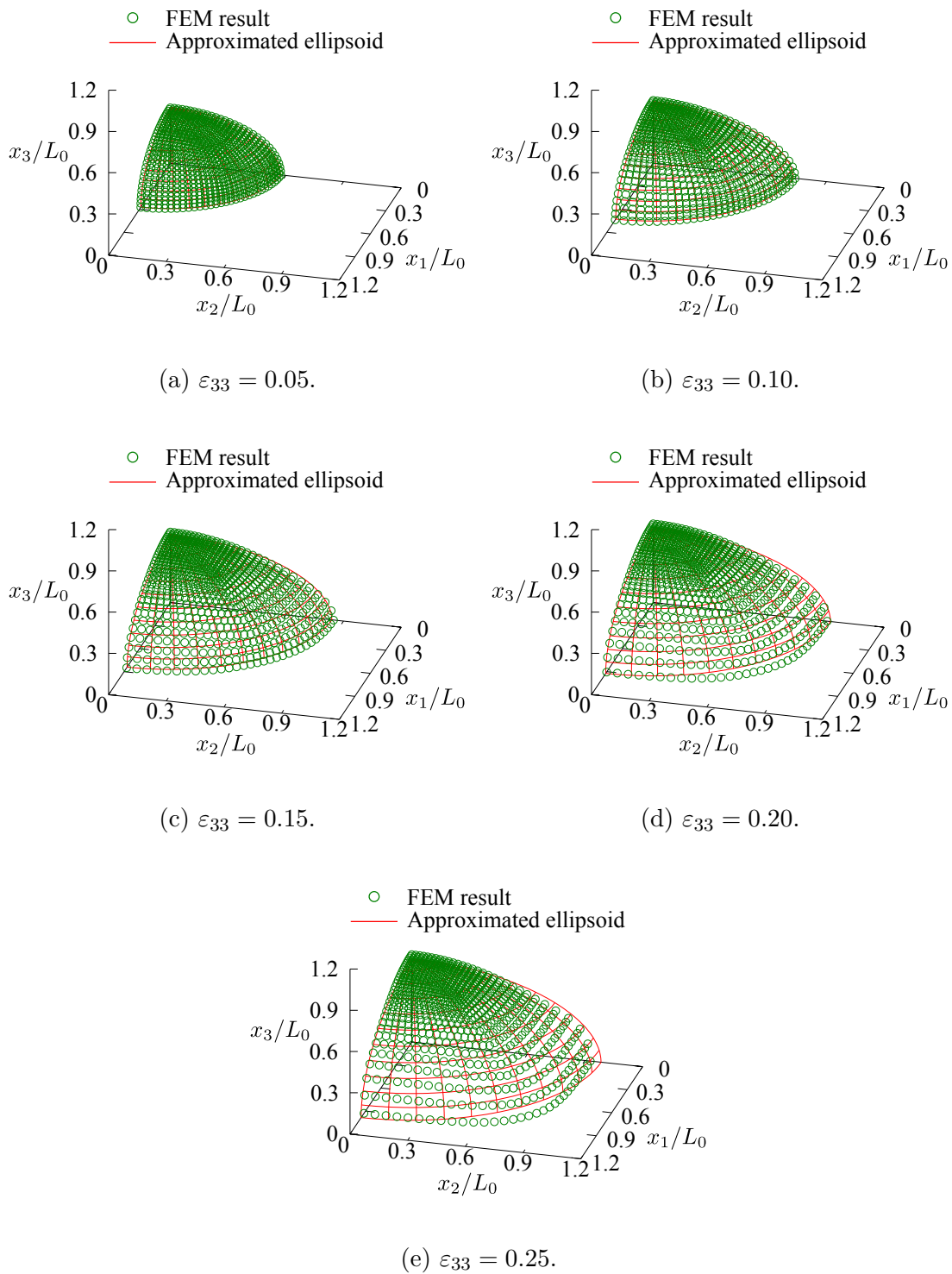


Fig. 4.8 Approximation of void shape by ellipsoid (Uniaxial strain tension).

$x_i^{(k)}$ は空孔周りの k 番目節点の X_i 方向座標, n は空孔周りにおける節点の数である. U は, 近似楕円体と解析結果における原点からの距離の誤差率の平均値となる. 図 4.9 に, ひずみ ε_{33} と誤差 U の関係を示す.

誤差 U は, $\varepsilon_{33} = 0.04$ 付近で一度極大値をとった後, $\varepsilon_{33} = 0.075$ 付近で極小値を取り, その後上昇していく複雑な挙動を示した. 極大値や極小値を取る点においては, 塑性変形の機構や支配的要因が変化していることも考えられる. しかしながら, $\varepsilon_{33} = 0.1$ 程度までは誤差は 0.02 ほどであり, 楕円体による近似は妥当であると思われる. よりひずみ範囲が大きくなっていく場合, 空孔形状が楕円体から離れていく他にも母材中における新規空孔の発生などの影響があると考えられる. そのため, 本章においてはひずみ範囲 10% 以下を対象とする.

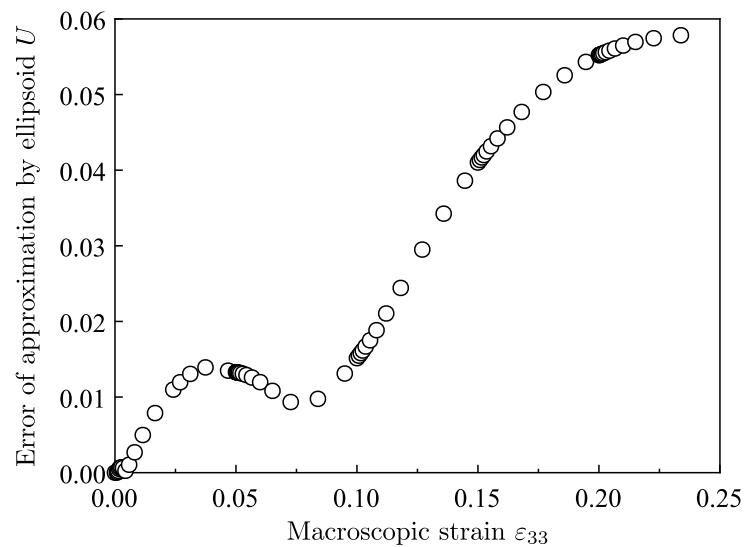


Fig. 4.9 Relation between macroscopic strain and error of approximation by ellipsoid.

4.4.3 3軸ひずみ下における応力-ひずみ-損傷テンソル関係

単位セルの有限要素モデルに対して3軸方向にひずみを与え, その際の応力—ひずみ—損傷テンソルの関係を, 提案した構成式の数値積分結果と比較する. 具体的な境界条件としては, 簡単のために $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ とした比例ひずみ経路とし, $\varepsilon_3/\varepsilon_1 = \varepsilon_3/\varepsilon_2$ を解析条件ごとに变化させる. 応力三軸度 σ_H/σ_{eq} の影響を調べるため, 図 4.10 のように, 弾性域における σ_H — σ_{eq} 平面上における応力経路から, 応力角度 $\theta = \tan^{-1} \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_H}$ を定義し, $\theta = 0 \sim 90[\text{deg}]$ の間で5段階の条件について解析を行った.

結果として, 主応力と相当ひずみの関係を図 4.11 に, 相当ひずみと損傷テンソルの主値

第4章 異方性 Gurson の降伏関数に対する異方損傷発展則の妥当性検証

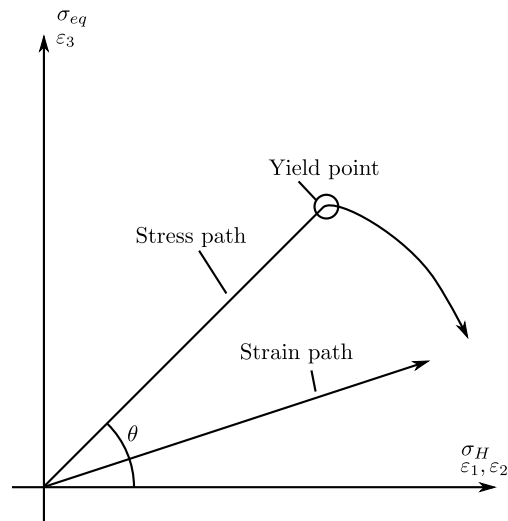
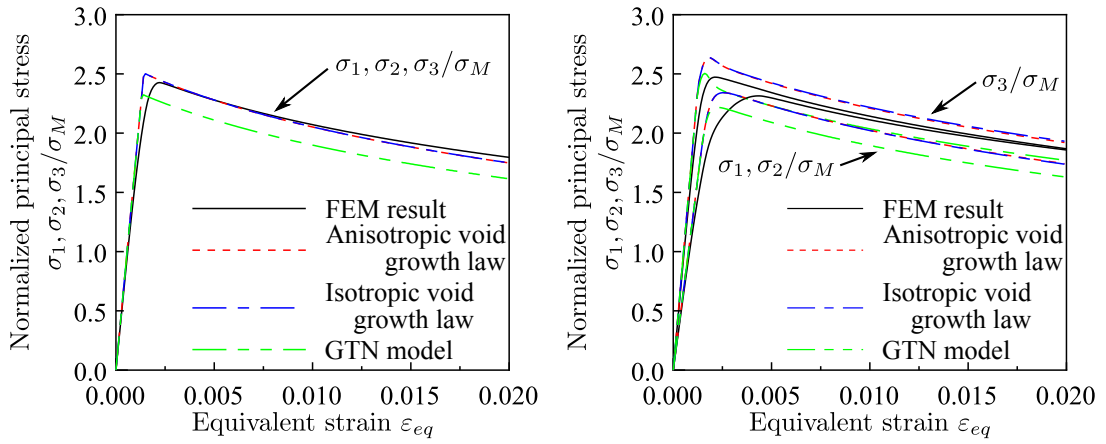


Fig. 4.10 Strain and stress path of applied analytical condition.

の関係を図 4.12 に示す．提案した構成式におけるパラメータ c , h , η_1/η_2 は，以下のような手順で決定した．

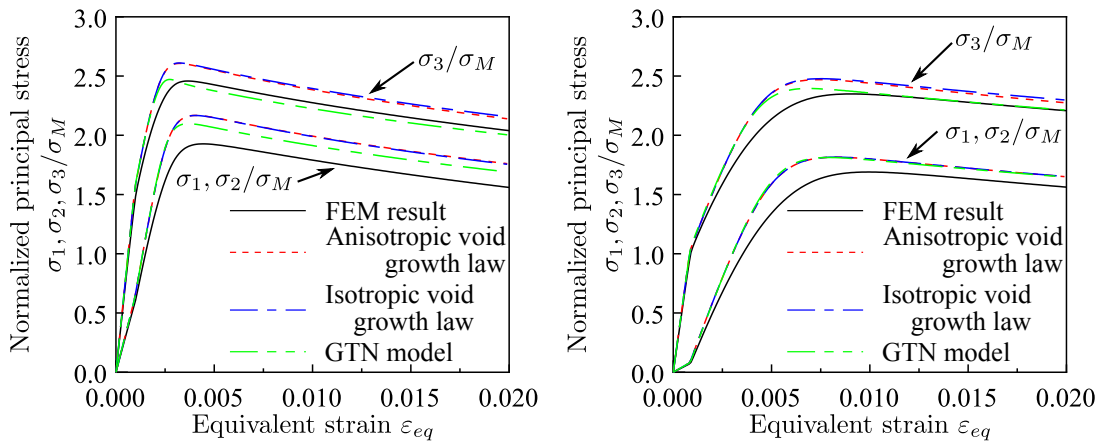
1. h , η_1/η_2 の影響がない, $\theta = 90[\text{deg}]$ (非圧縮引張)における応力—ひずみ線図(図 4.11(e))が, 有限要素解析結果とよく一致するよう, $c = 0.4$ と決定.
2. η_1/η_2 の影響がなく, h の影響が最も大きいと思われる $\theta = 0[\text{deg}]$ (等 3 軸引張)における応力—ひずみ線図(図 4.11(a))がよく一致するよう, $h = 1.0$ と決定. このとき c の値は, 1. から変更しない.
3. c , h の値は 1. および 2. と同じものとし, 空孔の異方的成長が比較的顕著であると思われる, $\theta = 45[\text{deg}]$ におけるひずみ—損傷テンソル関係(図 4.12(c))がよく一致するよう, $\eta_2/\eta_1 = 2.0$ と決定.

また, 比較対象として空孔の等方的成長を仮定した損傷発展式による結果と, GTN モデルによる結果を併記している. 前者のパラメータは, 先程と同様に $c = 0.4$ および $h = 1.0$ であり, GTN モデルにおけるパラメータは, 最もよく用いられる⁽⁵⁾ $q_1 = 1.5$ とした.



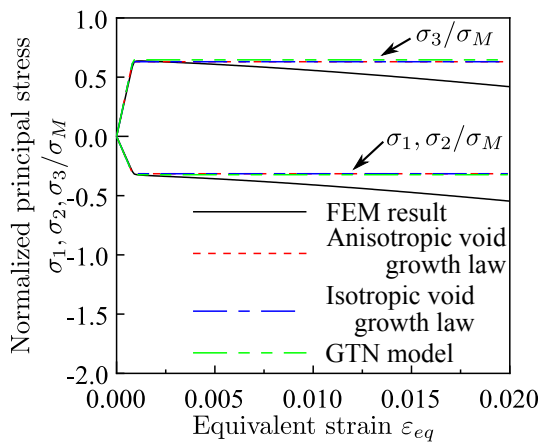
(a) $\theta = 0$ [deg].

(b) $\theta = 22.5$ [deg].



(c) $\theta = 45$ [deg].

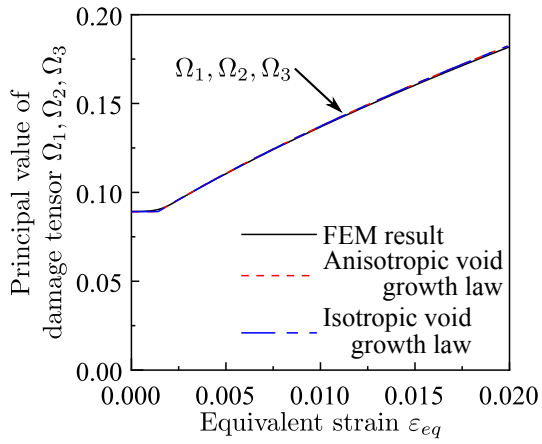
(d) $\theta = 67.5$ [deg].



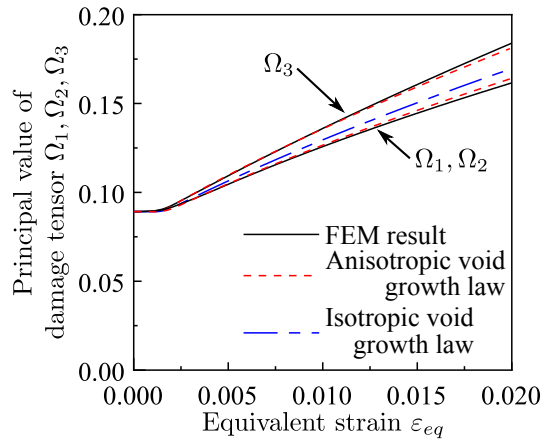
(e) $\theta = 90$ [deg].

Fig. 4.11 Relation between principal stress and equivalent strain.

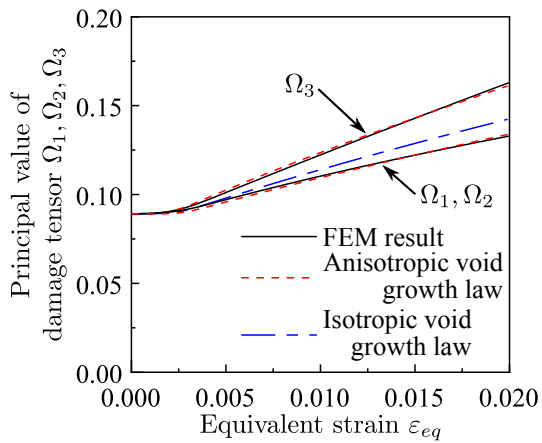
第 4 章 異方性 Gurson の降伏関数に対する異方損傷発展則の妥当性検証



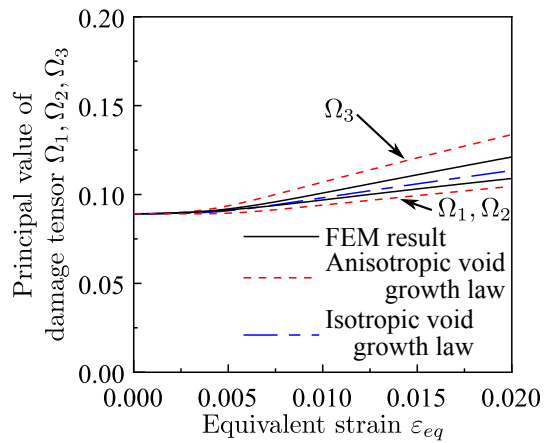
(a) $\theta = 0$ [deg].



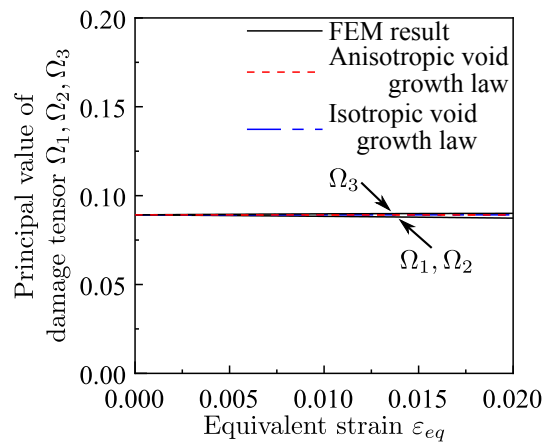
(b) $\theta = 22.5$ [deg].



(c) $\theta = 45$ [deg].



(d) $\theta = 67.5$ [deg].



(e) $\theta = 90$ [deg].

72 Fig. 4.12 Relation between equivalent strain and principal value of damage tensor.

等 3 軸引張状態における損傷テンソルの変化 (図 4.12(a)) は、応力に方向性がないため 2 つの損傷発展式に差はなく、正確に同じ結果となる。一方で、応力—ひずみ関係 (図 4.4.3) を見ると、異方性 Gurson の降伏関数を用いた結果のほうが、GTN モデルによる結果よりも有限要素解析結果とよく一致している。これは、GTN モデルにおける独立なパラメータが q_1 のみであるのに対し、異方性 Gurson の降伏関数は c, h の 2 つであるためといえる。GTN モデルにおいても同様のパラメータを容易に適用できることを考えれば、異方性 Gurson の降伏関数に優位性があるとは言えない。

次に、非圧縮引張 (図 4.11(e), 4.12(e)) の結果を見ると、どの構成式もほぼ同じ結果となった。一方で、有限要素解析結果における応力は、降伏後に減少していることがわかるが、各構成式における応力は一定の値となっている。応力の変化はセル内の内部状態の変化によるものと言えるが、今回の解析では母材は弾完全塑性体であるため、母材の内部状態は弾性ひずみのみで決定される。また、図 4.12(e) を見ると損傷テンソルはほとんど変化していない。よって、セル内の内部状態は母材中の弾性ひずみと空孔分布形態によって決定されることを考えれば、理論と有限要素解析の差異の原因は、

1. 母材弾性ひずみの影響。
2. 損傷テンソルだけでは空孔分布形態を完全に表すことができない。

のいずれかが考えられる。前者、後者ともに、構成式で考慮するためには理論の大幅な変更が必要になるが、非圧縮引張のような応力三軸度がほぼ 0 となる場合において延性破壊が問題となることは少ないと思われるため、問題無いといえるだろう。

提案した構成式における損傷発展パラメータ η_2/η_1 は、図 4.12(c) の結果を用いて決定したが、他の応力 (ひずみ) 状態である図 4.12(b) および図 4.12(d) においても、よく空孔の成長挙動を表現することができているとわかる。このように、熱力学的考察から導いた損傷発展式の妥当性が確かめられた。しかしながら、応力—ひずみ関係を見ると、2 つの損傷発展式の間大きな差がないことがわかる。ここで、図 4.13 に有限要素解析から求めた応力三軸度の変化を示す。

$\theta = 90[\text{deg}]$ を除いて、塑性変形が生じると急激に応力三軸度が大きくなることがわかる。今回解析した中では、 $\theta = 90[\text{deg}]$ 以外で最も応力三軸度の小さい $\theta = 67.5[\text{deg}]$ においても、 $\varepsilon_{eq} = 0.2[\%]$ 程度で $\sigma_H/\sigma_{eq} = 1.0$ を超えることがわかる。単軸引張応力下では $\sigma_H/\sigma_{eq} = 1/3$ 、等 2 軸引張でも $\sigma_H/\sigma_{eq} = 2/3$ であることを考えれば、これは非常に大きな値といえる。このような非常に大きな応力三軸度の範囲においては、Gurson の降伏関数、異方性 Gurson の降伏関数ともに第 2 項の静水応力項が非常に大きくなり、応力の方向性を表す第 1 項の影響が非常に小さくなる。これにより、損傷テンソルの成分に差があっても応力—ひずみ関係に差が見られなかったものと考えられる。しかしながら、例えばひずみ経路

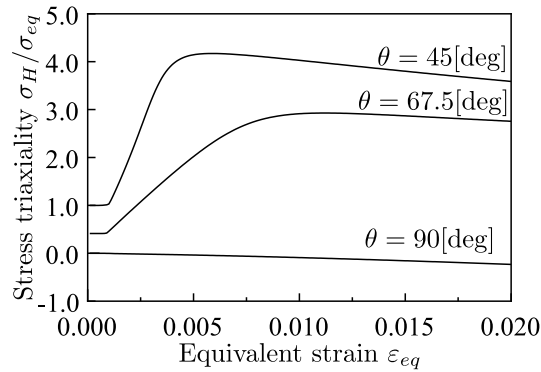


Fig. 4.13 Increase of stress triaxiality by plastic deformation.

が非比例的である場合には、応力—ひずみ関係にも影響があると思われる、提案した理論の優位性があることを注記する。

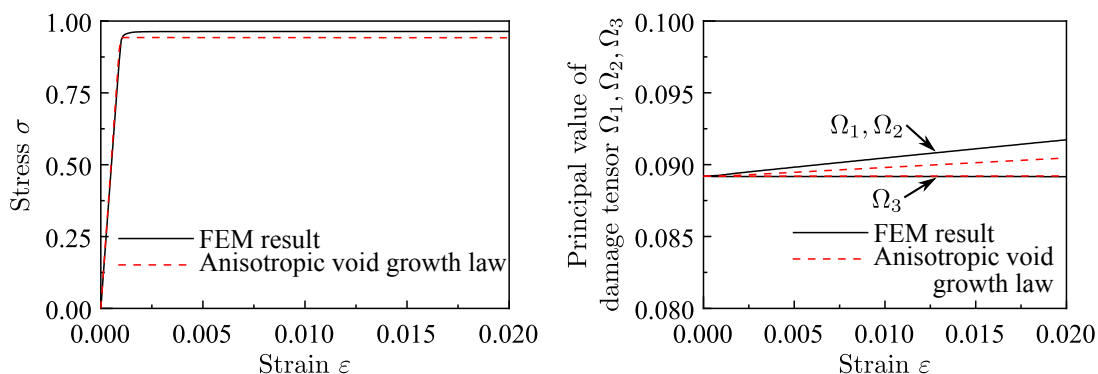
4.4.4 単軸応力下における応力-ひずみ-損傷テンソル関係

前項では、3軸ひずみ下において理論の妥当性を検証したが、ひずみ比を一定とした負荷経路では塑性変形にともなって応力三軸度が非常に大きくなり、一般的な応力状態における検討は行うことができなかった。そこで本項では、単軸引張応力下において構成式の数値積分結果と単位セル有限要素解析結果を比較し、理論の妥当性を検証する。

図4.14は、単軸応力状態 ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) における、ひずみ $\epsilon = \epsilon_3$ と応力 $\sigma = \sigma_3$ 、損傷テンソルの成分の関係を示したものである。有限要素解析結果を見ると、引張方向における損傷テンソルの成分 Ω_3 はほとんど変化せず、そのために応力 σ も塑性域においてほぼ一定となった。一方で、損傷テンソルの引張方向と垂直な方向の成分 Ω_1, Ω_2 は、増加していることがわかる。今回提案した構成式においてこれを表現する場合、パラメータ c, h は3軸ひずみ状態と同じ $c = 0.4, h = 1.0$ で初期降伏応力は概ね一致したが、損傷発展パラメータ η_2/η_1 は -3.5 となった。3軸ひずみ状態において用いていた値である 2.0 と比べると大きく異なっている。

このことから、損傷テンソルの挙動は応力三軸度に応じて大きく変化し、提案した構成式でこれを表現するためには η_2/η_1 を応力三軸度の関数とする必要があると考えられる。しかしながら、これは熱力学的考察とは矛盾している。

ところで、提案した損傷発展式は、損傷テンソルの熱力学的共役力 \mathbf{B} が損傷テンソルの2次式で与えられると仮定している。しかしながら、この仮定に物理的意味はなく、現象論的といえる。このことから、損傷テンソル速度とその共役力に対して力学的な考察を行い、より理論的に共役力 \mathbf{B} を決定することで、この問題は解決できる可能性がある。



(a) Stress - strain relationship.

(b) Strain - damage relationship.

Fig. 4.14 Comparison of FEA of unit cell and numerical integration of presented constitutive equation.

4.5 結言

本章では、異方性 Gurson の降伏関数に対して熱力学的な考察を行って導いた、異方損傷発展式の妥当性を検証した。比較対象として、規則的な空孔分布形態を仮定したモデルについて、有限要素解析を行った。得られた知見を以下にまとめる。

1. 単軸ひずみ引張下における単位セル内の塑性域の進展の有限要素解析結果は、定性的には Benzerga⁽¹⁴⁾ による空孔近傍部 (Benzerga はこの部分を ligament と表現している) へ塑性ひずみが集中するという考察と一致した。Benzerga は、この考察に基づいて尖り点のある降伏関数を導出しており、理論を精密化していく上で興味深い。
2. 単軸ひずみ引張下における有限要素解析結果から、Helmholtz 自由エネルギーに対する損傷テンソルの影響は、弾性域と比較して塑性域が支配的であることが示された。これは早川・村上⁽²⁷⁾ の考察に反するが、彼らのモデルは比較的延性が乏しく空孔の成長が無視できるような問題に対して適用されるものであると考えられる。
3. 空孔形状が球形で等方的に分布しているような初期状態では、変形後の空孔形状はおおよそ楕円体で近似することができ、ひずみが 10% 程度のときの誤差は 2% ほどである。しかしながら、誤差率はひずみに対して複数の変曲点と極値を伴うような、複雑な挙動を示す。
4. 3 軸方向に一定のひずみ比を与えた比例負荷経路において、提案した損傷発展式は有限要素解析結果の異方的な空孔成長挙動をよく表すことができる。しかしながら、こ

第4章 異方性 Gurson の降伏関数に対する異方損傷発展則の妥当性検証

れは比例ひずみ経路におけるものであり，他の応力条件についても検討を行うことが望ましい．

5. 単軸応力状態において，提案した損傷発展式で空孔成長挙動を表現するためには，損傷発展パラメータ η_2/η_1 の値を，3軸ひずみ状態における値から大幅に変更する必要がある．これは熱力学的考察とも矛盾しており，改善には散逸不等式のより力学的な定式化が必要であると思われる．

第5章 損傷共役力と散逸ポテンシャルの再検討

5.1 緒言

2.6節で導いた構成式の最も大きな問題点は、パラメータ η_2/η_1 が応力三軸度によって変化することである。そこで、2.7節では損傷共役力 \mathbf{B} の新しい関数形を用いた、新たな構成式を導出した。本節では、これらの構成式と有限要素解析結果とを比較し、その妥当性を検証する。

5.2 有限要素解析条件

本節では、比較対象として用いる有限要素解析モデルについて説明する。ただし、母材材料特性、境界条件および巨視的物理量の導出方法などは第4章と同様であるため、割愛する。

5.2.1 空孔分布形態

解析対象とする空孔分布形態として、まず簡単のために $L_1 = L_2$, $a_1 = a_2$ とする。空孔配列間隔による影響と、空孔縦横比による影響とを個別に調べるため、球形空孔を仮定したモデルとして、空孔間隔比を $L_3/L_1 = L_3/L_2 = 0.75, 1.0, 2.0, 3.0$ の4種類検討する。また、立方体形状の単位セルについて、空孔縦横比を $a_1/a_3 = a_2/a_3 = 0.25, 0.5, 2.0, 4.0$ の4通りについて解析をする。ただし、空孔どうしが重なるようなモデルについては除外する。初期空孔体積分率としては、 $f_0 = 0.1, 0.3, 0.5$ の3通りをそれぞれのモデルについて計算する。解析対象とする空孔の分布形態と、損傷テンソルの成分の関係を表5.1, 5.2にまとめる。これらの表に示している通り、球形空孔を分布させた $L_3/L_1 = L_3/L_2 = 2.0$ のモデルと、楕円体空孔を分布させた $a_1/a_3 = a_2/a_3 = 2.0$ のモデルの損傷テンソルの成分は同じ値である。これにより、損傷テンソルが同じ値を取りながら空孔形状が異なる場合についても検証する。

Table 5.1 Analysis conditions of models with spherical void.

| | Void arrangement ratio $L_3/L_1 = L_3/L_2$ | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------------------------|------------|----------------------|------------|----------------------|------------|----------------------|------------|
| | 0.75 | | 1.0 | | 2.0 | | 3.0 | |
| Void volume fraction f | Ω_1, Ω_2 | Ω_3 | Ω_1, Ω_2 | Ω_3 | Ω_1, Ω_2 | Ω_3 | Ω_1, Ω_2 | Ω_3 |
| 0.01 | 0.0618 | 0.0463 | 0.0561 | 0.0561 | 0.0455 | 0.0891 | 0.0389 | 0.117 |
| 0.03 | 0.129 | 0.0964 | 0.117 | 0.117 | 0.0926 | 0.185 | 0.0809 | 0.243 |
| 0.05 | 0.181 | 0.135 | 0.164 | 0.164 | 0.130 | 0.260 | 0.114 | 0.341 |

Table 5.2 Analysis conditions of models with ellipsoidal void.

| | Void aspect ratio $a_1/a_3 = a_2/a_3$ | | | | | | | |
|--------------------------|---------------------------------------|------------|----------------------|------------|----------------------|------------|----------------------|------------|
| | 0.25 | | 0.5 | | 2.0 | | 4.0 | |
| Void volume fraction f | Ω_1, Ω_2 | Ω_3 | Ω_1, Ω_2 | Ω_3 | Ω_1, Ω_2 | Ω_3 | Ω_1, Ω_2 | Ω_3 |
| 0.01 | 0.0891 | 0.0223 | 0.0707 | 0.0354 | 0.0445 | 0.0891 | 0.0354 | 0.141 |
| 0.03 | — | | 0.147 | 0.0735 | 0.0926 | 0.185 | — | |
| 0.05 | — | | 0.207 | 0.103 | 0.130 | 0.260 | — | |

5.2.2 要素分割

要素には八節点六面体 1 次要素を用いた。各モデルの節点数・要素数を表 5.3 および 5.4 に示す。また、各モデルの要素分割を表 5.5, 5.6 にそれぞれ示す。

Table 5.3 Number of nodes and elements for FEA of models with spherical void.

| Void volume fraction f | Void arrangement ratio $L_3/L_1 = L_3/L_2$ | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 0.75 | | 1.0 | | 2.0 | | 3.0 | |
| | Nodes | Elems | Nodes | Elems | Nodes | Elems | Nodes | Elems |
| 0.01 | 14496 | 12750 | 15141 | 13500 | 15376 | 13500 | 19216 | 16875 |
| 0.03 | 10891 | 9375 | 11536 | 10125 | 13213 | 11475 | 15611 | 13500 |
| 0.05 | 10891 | 9375 | 9373 | 8100 | 11771 | 10125 | 14169 | 12150 |

Table 5.4 Number of nodes and elements for FEA of models with ellipsoidal void.

| Void volume fraction f | Void aspect ratio $a_1/a_3 = a_2/a_3$ | | | | | | | |
|--------------------------|---------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 0.25 | | 0.5 | | 2.0 | | 4.0 | |
| | Nodes | Elems | Nodes | Elems | Nodes | Elems | Nodes | Elems |
| 0.01 | 15141 | 13500 | 15141 | 13500 | 15141 | 13500 | 15141 | 13500 |
| 0.03 | — | | 11536 | 10125 | 11536 | 10125 | — | |
| 0.05 | — | | 11536 | 10125 | 11536 | 10125 | — | |

5.3 降伏関数の妥当性

本節では、降伏関数として用いる通常の GTN モデルと、Benzerga⁽¹⁴⁾ による降伏関数の妥当性を検証する。弾完全塑性体の母材を仮定したモデルによる有限要素解析結果について巨視的な降伏を定義し、種々の比例ひずみ経路を与えることによって降伏面を計算する。

Table 5.5 Mesh divisions for FEA of models with spherical void.

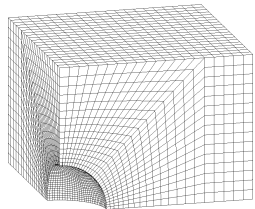
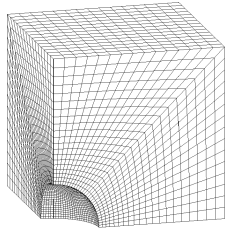
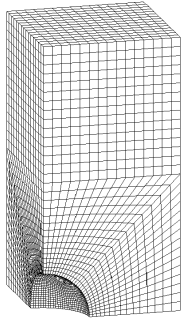
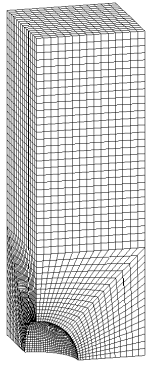
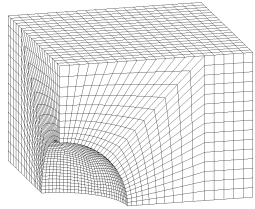
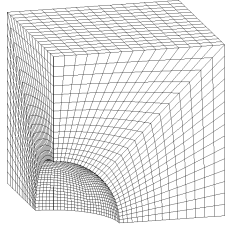
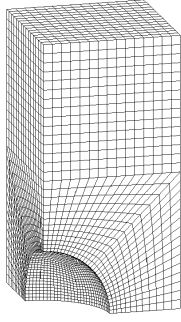
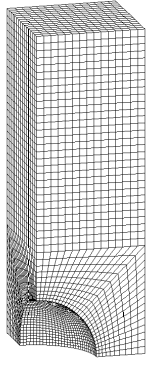
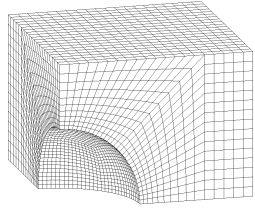
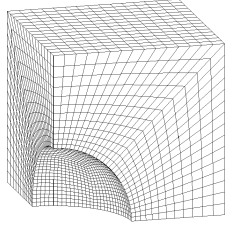
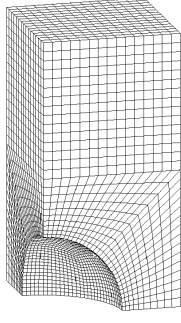
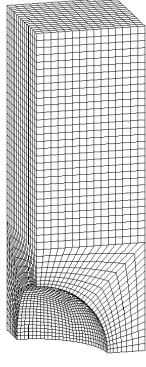
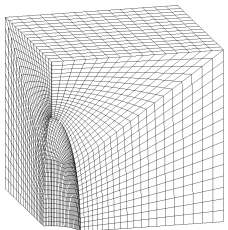
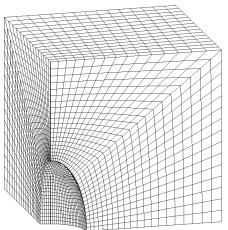
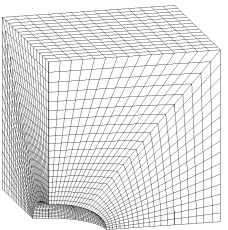
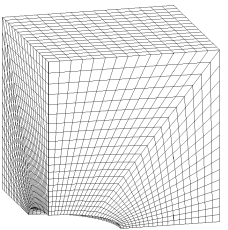
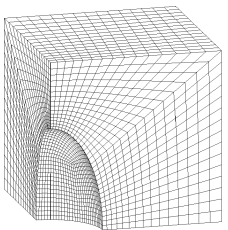
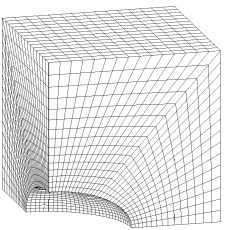
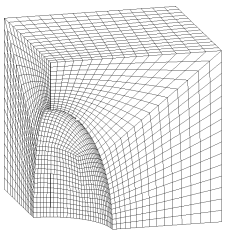
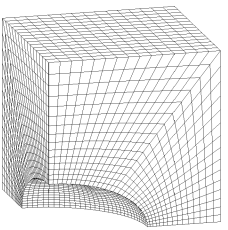
| Void spacing ratio $L_3/L_1 = L_3/L_2$ | | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 0.75 | 1.0 | 2.0 | 3.0 |
| $f = 0.01$ | | | |
|  |  |  |  |
| $f = 0.03$ | | | |
|  |  |  |  |
| $f = 0.05$ | | | |
|  |  |  |  |

Table 5.6 Mesh divisions for FEA of models with ellipsoidal void.

| Void aspect ratio $a_1/a_3 = a_2/a_3$ | | | |
|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 0.25 | 0.5 | 2.0 | 4.0 |
| $f = 0.01$ | | | |
|  |  |  |  |
| $f = 0.03$ | | | |
| N/A |  |  | N/A |
| $f = 0.05$ | | | |
| N/A |  |  | N/A |

5.3.1 純偏差応力下における π 平面上の降伏曲線

降伏関数(散逸ポテンシャル)は、式(2.119)の熱力学的力の関数となるが、この式から損傷状態のテンソル的特性は平均垂直応力 σ_H を通じてのみあらわれていることがわかる。すなわち、平均垂直応力が $\sigma_H = 0$ となるような、純偏差応力状態においては空孔分布形態による異方性が現れないと結論づけられる。これについて検証するため、本項では純偏差応力状態における単位セルの降伏挙動を有限要素解析によって調べる。

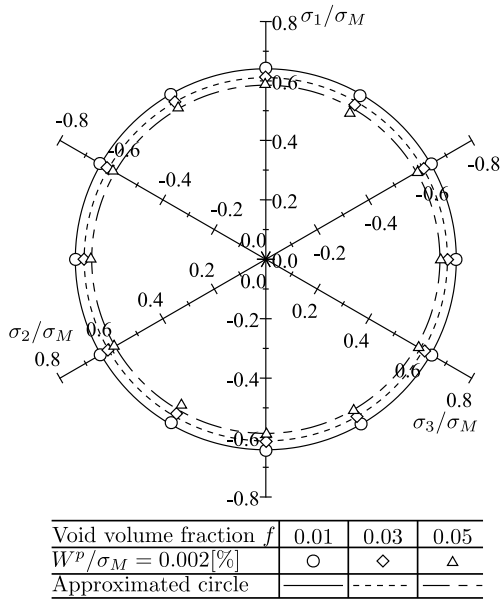
具体的な解析方法としては、純偏差応力状態とするために与える巨視的ひずみの体積成分を0とする。弾性域において一般的な Hooke 則が成り立つと仮定すれば、平均垂直応力 σ_H は体積弾性ひずみに比例するため、弾性域における平均垂直応力は0となる。ところで、図4.11(e)を見ると、純偏差応力状態における応力—ひずみ関係は塑性変形の開始にともなって急激に変化しており、比較的明りような降伏点を持つことがわかる。このことから、巨視的な降伏の定義としては、巨視的塑性仕事に適切なしきい値に達したときに降伏したとみなす、すなわち等塑性仕事面を降伏面とすることが適切であると思われる。よって、巨視的な降伏の定義として、母材降伏応力で無次元化した巨視的塑性仕事を用いて $W^p/\sigma_M = 0.002[\%]$ を巨視的降伏と定義する。

純偏差応力状態における降伏挙動は、主応力空間において原点を通る(1,1,1)方向面、すなわち π 平面上に図示することができる。各モデルにおける π 平面上の降伏曲線の計算結果を、図5.1, 5.2にそれぞれ示す。結果を見ると、どのモデルについても π 平面上の降伏面には方向性はほとんど見られない。また、降伏面の形状が円形となっていることから、原点を中心とする近似円を併記している。どの降伏点も近似円とほぼ一致していることがわかる。 π 平面上における円形の降伏面は、Mises 型の降伏条件式と一致しており、純偏差応力状態においては Mises 型の降伏関数を用いることが適切であると思われる。

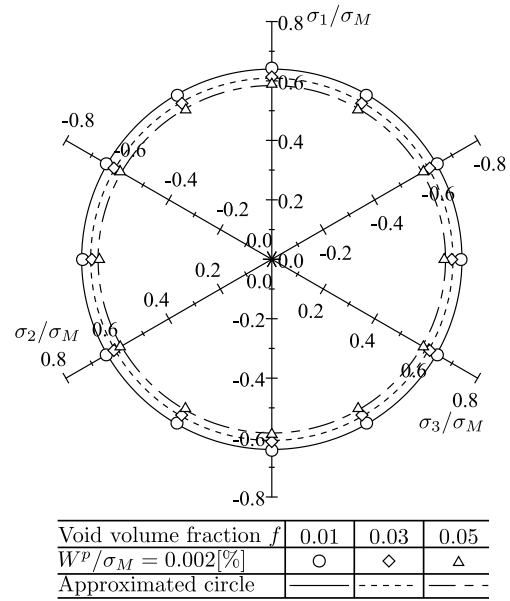
また、図5.1(c)と5.2(c)は、損傷テンソルの値は同じであるが空孔形状がそれぞれ球と楕円体とで異なるモデルである。両者ともに等方性とみなせるものと思われるが、図中拡大部を比べると空孔が楕円体形状である図5.2(c)は、球形空孔である図5.1(c)と比較して異方性が大きく現れていることがわかる。これは空孔の曲率の違いによる、応力集中の大きさの差によるものと考えられる。空孔周りの応力集中は、空孔の曲率が大きくなるほど顕著になると考えられ、場所によって空孔の曲率が異なる楕円体空孔の場合、これを原因として異方性が現れているものと考えられる。しかしながら、損傷テンソルは空孔形状の情報を持たないため、これを考慮するには空孔形状を表す新たな変数を定義する必要がある。よって、以降では球形空孔に限って議論を進めることとする。

ところで、 π 平面上における降伏面が円形となっていることから、Mises 型の降伏関数を考えることが適切と思われるが、図5.1, 5.2を見ると、降伏面は空孔体積分率が大きくなる

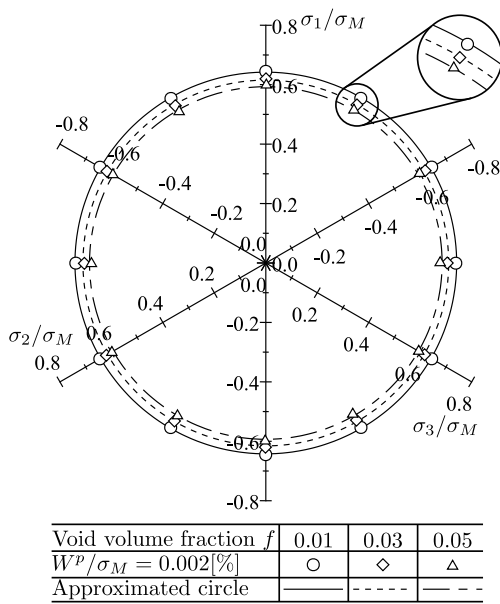
5.3. 降伏関数の妥当性



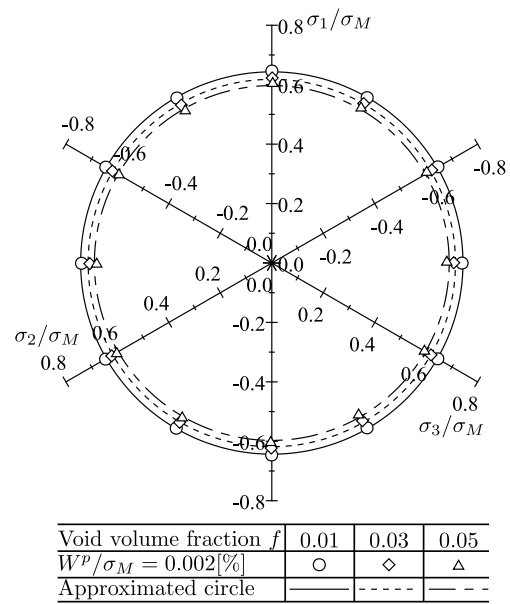
(a) $L_3/L_1 = L_3/L_2 = 0.75$.



(b) $L_3/L_1 = L_3/L_2 = 1.0$.



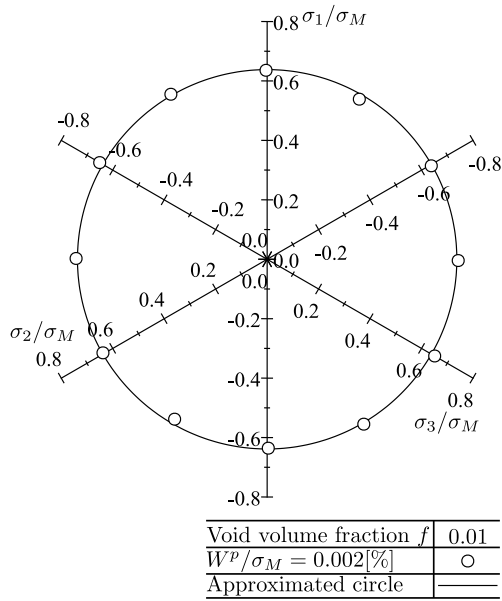
(c) $L_3/L_1 = L_3/L_2 = 2.0$.



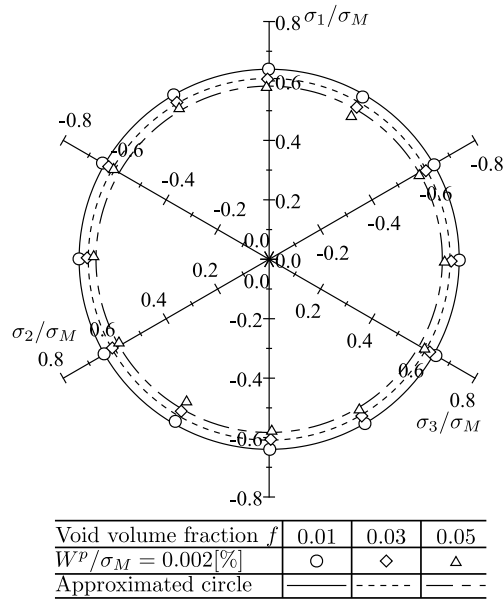
(d) $L_3/L_1 = L_3/L_2 = 3.0$.

Fig. 5.1 Yield loci on π plane with various void spacing ratio.

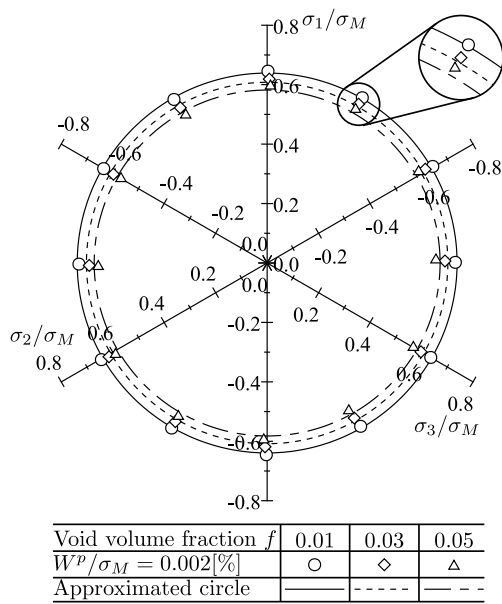
第5章 損傷共役力と散逸ポテンシャルの再検討



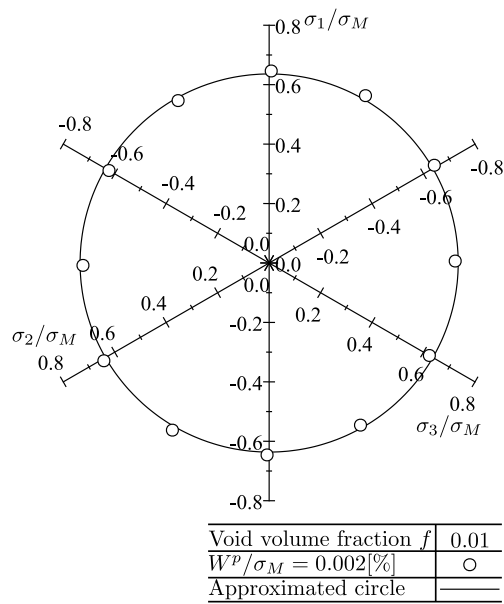
(a) $a_1/a_3 = a_2/a_3 = 0.25$.



(b) $a_1/a_3 = a_2/a_3 = 0.5$.



(c) $a_1/a_3 = a_2/a_3 = 2.0$.



(d) $a_1/a_3 = a_2/a_3 = 4.0$.

Fig. 5.2 Yield loci on π plane with various void aspect ratio.

5.3. 降伏関数の妥当性

につれて縮小していることがわかる。そこで、降伏時における Mises 型相当応力 σ_{eq} と、空孔体積分率 f の関係を図 5.3 にまとめた。

前述したように、空孔体積分率の増加に伴い、降伏時の相当応力 σ_{eq} は小さくなっていることがわかる。ここで、このような純偏差応力状態について、提案した降伏関数は次式のような形となる。

$$F = \left(\frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 + 2\eta_1 - 1 \quad (5.1)$$

図 5.3 中の実線は、上式を描いたものである。有限要素解析結果を見ると、空孔体積分率 f の増加に伴って降伏点の相当応力は小さくなっていくが、提案した構成式はこの傾向を表すことができている。図 5.3 の傾きは解析結果と理論式とで異なっているが、式 (5.1) のように $\tilde{\sigma}'$ の第 2 不変量を用いる限り、理論式における傾きは一意に決定される。第 3 不変量を組み込めばより良く一致させることができるが、式の簡便さを優先し、式 (5.1) の形とした。パラメータ η_1 については、有限要素解析結果との誤差の二乗和が最小となるよう、 $\eta_1 = 0.0502$ と決定した。

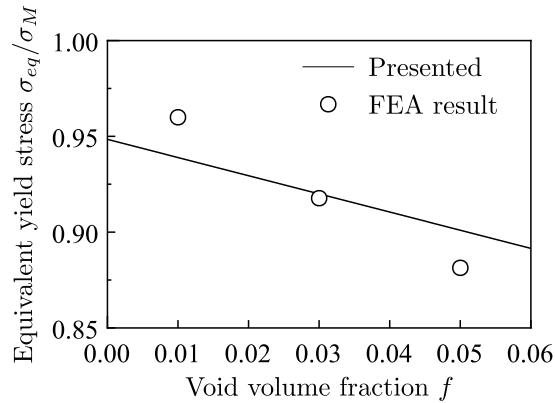


Fig. 5.3 Relation between void volume fraction f and equivalent stress σ_{eq} at yield point.

5.3.2 静水応力下における降伏関数

次に、偏差応力 $\sigma' = \mathbf{0}$ となる静水応力状態における降伏関数を考える。このとき、降伏条件は次式のようなになる。

$$\eta_2 \left(\frac{B_{kk}}{\sigma_M} \right)^2 + \eta_3 \left(\frac{B_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 = \{ \cosh^{-1}(1 - 2\eta_1) \}^2 \quad (5.2)$$

第5章 損傷共役力と散逸ポテンシャルの再検討

これから $\text{tr } \mathbf{B} - B_{eq}$ 平面において楕円形状となることがわかる。そこで、この平面において式 (5.2) と有限要素解析結果を比較した。結果を図 5.4 に示す。ここでは、与える変位を $u_1 = u_2 = u_3$ とすることで静水応力のみでの応力状態としている。初期の空孔体積分率によって差は見られるが、有限要素解析結果もおおよそ楕円形状に並んでいることがわかる。式 (5.2) を描くにあたり、パラメータ η_1 は前節で求めたように $\eta_1 = 0.0502$ としている。 η_2, η_3 についても前項と同様に、解析結果に対する誤差の二乗和が最小となる値として、 $\eta_2 = 12.7, \eta_3 = 66.1$ とした。図 5.4 内の楕円はこのパラメータを用いて理論式を描いたものである。

また、図 5.4 には損傷テンソルの変化方向を矢印で示している。降伏点とみなした計算ステップと、その直後のステップにおける損傷テンソルの値を利用した。その向きは楕円の法線方向を向いていることがわかり、 \mathbf{B} 空間内の降伏曲面における損傷テンソルの法線性があることがわかる。

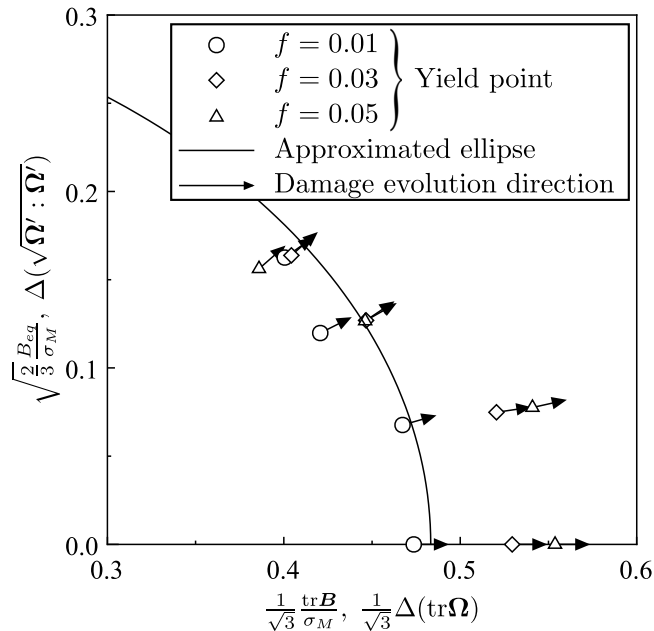


Fig. 5.4 Yield locus on $\text{tr } \mathbf{B} - B_{eq}$ plane and damage evolution direction.

5.3.3 等方損傷状態における $\sigma_H - \sigma_{eq}$ 平面上の降伏曲線

本項では、等方損傷状態における降伏条件を検討する。純偏差応力状態においては、単位セルの一部が降伏を開始するとすぐに応力-ひずみ線図は折れ曲がり、その後は一定の値をとる (図 4.11(e))。一方で、応力三軸度が高くなってくると、セルの一部が降伏を開始した後に応力-ひずみ線図はわずかに折れ曲がり、塑性域が充分に進展した段階で応力は減少し始

める。このような際には、応力が極大値をとった場所を降伏点とする、Ma・Kishimoto⁽⁷⁰⁾の考えを利用するのが適切と考えられるが、例えば図4.11(b)を見ると、 $\sigma_1 = \sigma_2$ と σ_3 とで極大値をとるときの相当ひずみ ε_{eq} の値は異なっている。一方で、図4.11(a)のような等3軸引張状態であれば、当然全ての主応力成分は同じひずみの値において極大値をとる。そこで、ここでは等3軸応力状態において応力が極大値をとる際の無次元化塑性仕事 W^p/σ_M を計算し、その値を等塑性仕事面におけるしきい値とすることを考える。各モデルに対して等三軸引張ひずみを与え、これを計算した結果を図5.5に示す。

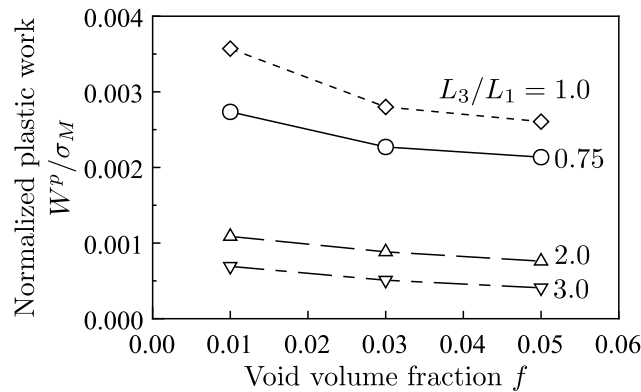


Fig. 5.5 Normalized plastic work at local maximum point of hydrostatic stress under pure-hydrostatic stress condition.

結果を見ると、応力が極大値をとる際の塑性仕事は各モデルによって異なっており、特に空孔配列比の影響を受けやすいことがわかる。このことから、各モデルにおける等塑性仕事面のしきい値は、図5.5のように異なる値を用いることとする。

簡単のために軸対称応力状態を考えれば、等方性材料の降伏条件は平均垂直応力 σ_H —相当応力 σ_{eq} 平面に描いた降伏曲線によって表現することができる。そこで、 $f_0 = 0.03$ のモデルについて種々のひずみ履歴を与え、 σ_H — σ_{eq} 平面状に等塑性仕事面を描いたものを図5.6に示す。

まず、通常 Gurson の降伏関数は、降伏面の定性的な形状をよく表すことができているが、特に応力三軸度の大きな場合において、降伏応力を大きく予想していることがわかる。Tvergaard の修正降伏関数では、このような高応力三軸度範囲における降伏面の不一致がパラメータ $q_1 = 1.5$ によって改善されていることがわかる。Rousselier の降伏関数は、解析結果とは異なる傾向を示しており、Goya らによる降伏関数は Gurson の降伏関数と Tvergaard による修正降伏関数との中間程度の値をとった。以上より、等方損傷状態における降伏関数としては、Tvergaard の修正降伏関数が単位セルの降伏挙動と最もよく一致すると結論付けられる。

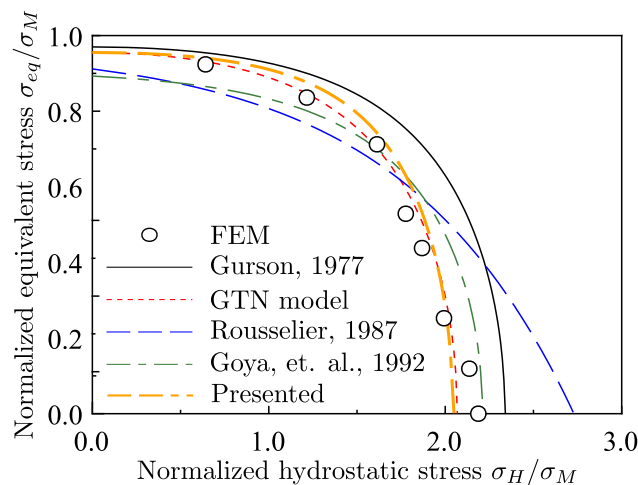


Fig. 5.6 Yield loci on $\sigma_H - \sigma_{eq}$ plane under isotropic damage condition ($f_0 = 0.03$).

5.3.4 塑性異方性の検証

本項では、空孔配列比が $L_3/L_1 = L_3/L_2 \neq 0$ となるような初期異方性を持つ空孔分布形態について有限要素解析を行い、空孔分布形態によって異方性を持つような降伏面の形状を検討する。簡単のため $\sigma_1 = \sigma_2$ の軸対称応力状態を考える。長岐・Sowerby⁽³⁸⁾ にならえば、このような応力状態は引張応力 σ と静水圧 P の組み合わせとみなすことができる(図 5.7)。よって、このような応力・損傷状態における異方性は、引張応力 σ —平均垂直応力 σ_H 平面上に描いた降伏曲線によって表すことができる。

静水応力 σ_H —引張応力 σ 平面上に降伏曲線を描いた結果を図 5.8 に示す。ここでも、初期空孔体積分率は $f_0 = 0.03$ とした。

比較的応力 3 軸度の小さな領域では、4.1 節で示したように異方性は現れておらず、空孔間隔によらず降伏曲線は一つの曲線上に乗っている。ある程度よりも応力 3 軸度が大きく、あるいは小さくなると異方性が現れ、 L_3/L_1 の値が 1.0 から離れるほど降伏曲線は縮小していく。

提案した降伏関数について、 $\eta_4 = -5.00$ としたものを示している。この値は、有限要素解析で得られた降伏曲線と理論とがよく一致するよう、試行錯誤的に決定した。先に述べた、 $\sigma_H = 0$ に近い応力状態では異方性が表れないこと、ある程度以上応力 3 軸度が大きくなった際の異方性を、それぞれよく表現することができている。もちろん、GTN モデルなどの等方的モデルは、この異方性を表現することはできない。

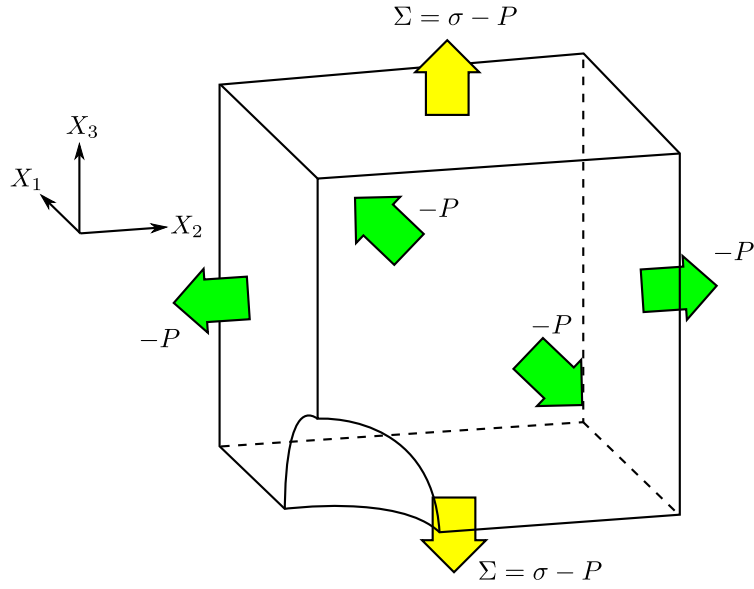


Fig. 5.7 Representation of axisymmetric stress condition by combination of tensile stress σ and pressure P .

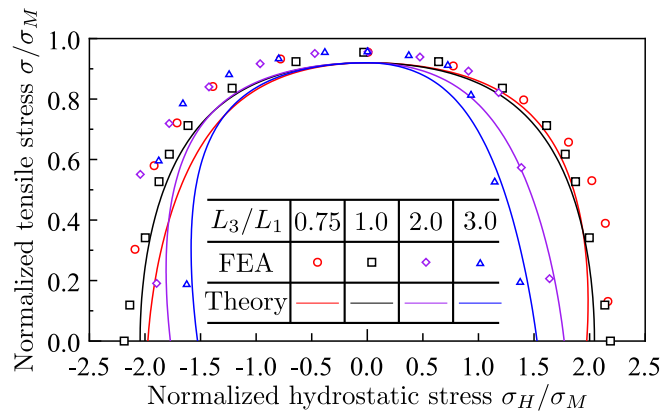


Fig. 5.8 Yield loci on $\sigma_H - \sigma$ plane ($\eta_4 = -5.00$).

5.3.5 応力-ひずみ線図と損傷テンソルの発展の比較

損傷テンソルの発展則と後続降伏挙動の妥当性検証のため、応力-ひずみ線図と損傷テンソルの値の変化を比較する。ここでは初期は等方的な損傷状態とし、 $f_0 = 0.02$ とした。

結果の例として、 $\varepsilon_1 = 0.0245$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0.000553$ の最終ひずみを与えた際の結果を図5.9に示す。この最終ひずみにおける相当ひずみは $\varepsilon_{eq} = 0.02$ となる。初期の損傷状態は等方性($\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3$)であるが、与えたひずみ経路が方向によって異なるため、降伏点以降は異方性が見られている($\Omega_1 = \Omega_2 \neq \Omega_3$)。提案した理論については、応力・ひずみ・損傷テンソルの関係と構成式がよく一致するよう、試行錯誤的に η_4 を決定し、 $\eta_4 = 5.00$ とした。2.0%までの相当ひずみについて、応力・損傷テンソルの変化をよく表していることがわかる。

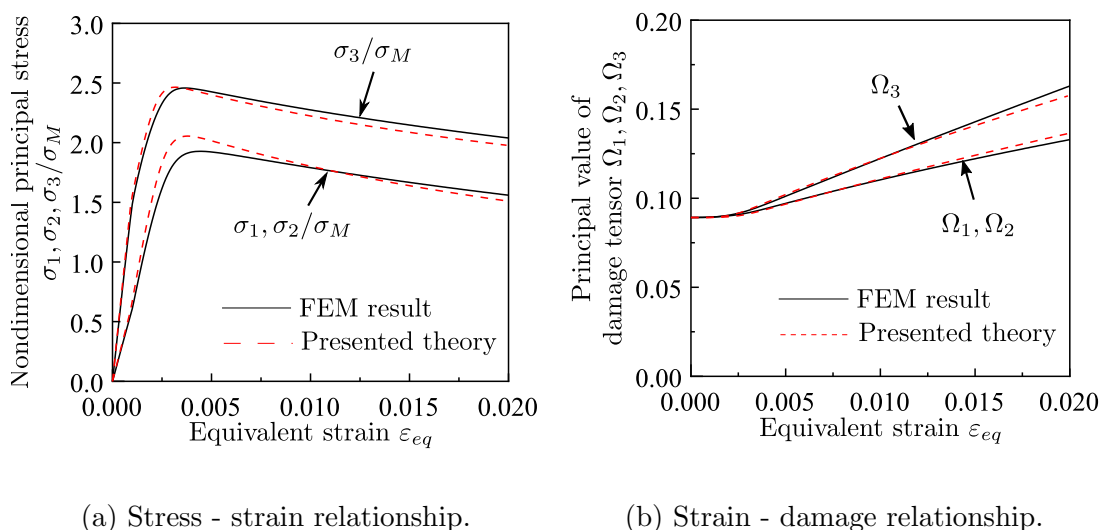
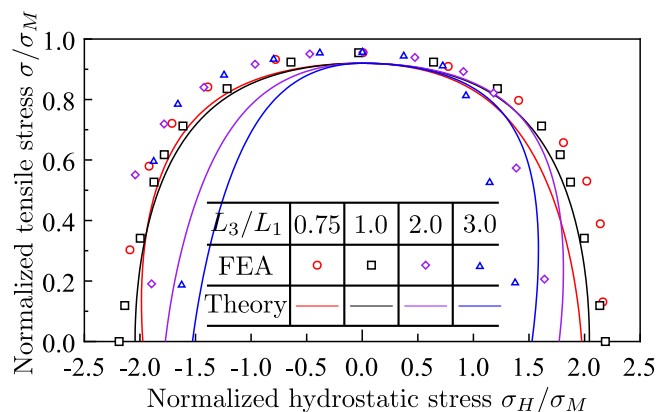


Fig. 5.9 Relation between stress, strain and damage tensor ($f_0 = 0.02$, initially isotropic damage condition, parameter $\eta_4 = 5.00$).

一方で、4.4節における検討では $\eta_4 = -5.00$ としており、ここで用いた $\eta_4 = 5.00$ とは異なっている。そこで、 $\eta_4 = 5.00$ とした場合について降伏曲線を描いたものを図5.10に示す。こちらについても、定性的には有限要素解析の結果を表すことができているが、 $\eta_4 = -5.00$ とした方がよく一致している。この点については、本理論に課題が残っている。

Fig. 5.10 Yield loci on $\sigma_H - \sigma$ plane ($\eta_4 = 5.00$).

5.4 結言

本章では、2.7節において検討した構成式について、単位セルの有限要素解析結果と比較することで妥当性を検証した。得られた知見を以下にまとめる。

1. 静水応力が0となるような純偏差応力状態において、球形空孔の場合、配列間隔の違いによる機械的性質の異方性は現れない。これは Grange ら⁽⁷¹⁾による検討結果と一致しており、2.7節で導いた損傷共役力の定義とも矛盾しない。楕円体空孔の場合においては若干の異方性が見られたが、損傷テンソルは空孔形状の情報を持たないためにこれを表現できないものと考えられる。このような空孔形状の影響による異方性を表現するためには、空孔形状を表す変数を新たに定義し、構成式に組み込む必要がある。
2. 静水応力状態について、損傷テンソルの発展する方向の散逸ポテンシャルに対する法線性が確認された。本理論では、損傷テンソルの共役力 \mathbf{B} の関数形は現象論的なパラメータを含まずに導出したものであるが、その妥当性が確認された。
3. 等方損傷状態について、多孔質材料で用いられている既存の降伏関数と、提案した降伏関数の比較を行った。提案した降伏関数は異方性を表現できることが特徴であるが、等方損傷状態についても既存の式と同等の一致を示した。
4. 提案した降伏関数によって異方性と損傷テンソルの発展とを同時に表すことができることを確認した。一方で、パラメータ η_4 については、降伏曲面を一致させようと導出した場合と、損傷テンソルの発展挙動を一致させようとした場合とで、異なる値となった。この点については課題が残っている。

第6章 多孔平板における空孔成長挙動の観察 と加工硬化の影響

6.1 緒言

本章では，2.8節において導出した理論の妥当性を検証する．母材の加工硬化挙動が空孔の成長に対してどのような影響を与えるかに主眼を置いており，より実際の多孔質材料に近いと思われる，円孔を空けた平板の実験結果を利用する．なお，本実験結果は狛館⁽⁷²⁾，塚本⁽⁷³⁾，室井⁽⁷⁴⁾の成果を引用している．

6.2 多孔平板の引張試験による空孔成長挙動の観察

6.2.1 試験片

図 6.1 に示す，ダンベル型試験片を利用する．2.2.1 項では，等間隔に限りなく空孔が配列した無限周期構造としているが，簡便に空孔の成長挙動を観察するため，試験片中央部に 5 個の空孔を空けている．試験片平行部方向の軸を持つ $X_1 - X_2$ 座標系に対して θ 回転させた座標系である， X'_1 方向， X'_2 方向についてそれぞれ等間隔とした．簡単のため，空孔は直径 d の円形とした．本論文においては空孔の配列の軸と負荷方向を一致させているが，図 6.1 のように角度 θ がついている場合でも，座標変換によって損傷テンソルの値を求めることができる．試験片の外形はワイヤ放電加工機で，円孔はエンドミルを用いて加工した．

加工硬化の影響を調査するため，供試材には SUS304 と A5052 をそれぞれ使用した．SUS304 は 850 °C で 2 時間保持後に空冷，A5052 は 360 °C で 1 時間保持後に炉冷することで残留応力を除去している．引張試験によって調べた供試材の機械的性質を，表 6.1 に示す．

6.2. 多孔平板の引張試験による空孔成長挙動の観察

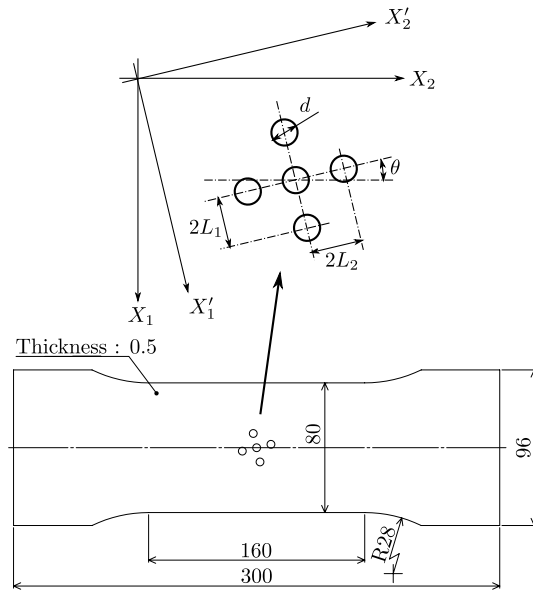


Fig. 6.1 Shape of specimen and holes distribution.

Table 6.1 Mechanical properties of the specimens.

| | Rolling direction RD (deg) | 0.2% proof stress $\sigma_{0.2}$ (MPa) | Work hardening coefficient n |
|--------|---------------------------------|-------------------------------------------|-----------------------------------|
| SUS304 | 0 | 293.6 | 0.589 |
| | 45 | 280.2 | 0.522 |
| | 90 | 281.5 | 0.477 |
| | Ave. | 285.1 | 0.529 |
| A5052 | 0 | 85.1 | 0.319 |
| | 45 | 80.4 | 0.289 |
| | 90 | 83.2 | 0.303 |
| | Ave. | 82.6 | 0.304 |

6.2.2 試験・計測方法

試験機には、島津製作所製 AUTO GRAPH AG-250kNG を用いた。試験速度は 5.0mm/min とし、肉眼で空孔近傍に亀裂が確認された時点で試験を終了する。

空孔形状の測定には、Canon 製デジタル一眼レフカメラ EOS kissX2 にマクロレンズ EF-S60mmf/2.8MACRO USM を装着したものを使用する。白熱電球で試験片に光を当て、その反対側の面から撮影することで逆光を作り、母材部分と空孔部分を区別しやすいようにした。変形中に連続的に撮影することで、空孔形状の変化を計測する。撮影結果の生データの例を、図 6.2 に示す。

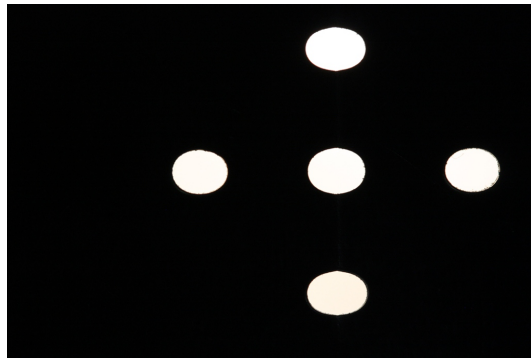


Fig. 6.2 An example of the photos of holes during tensile deformation.

撮影した結果は、画像処理ソフトウェア Image J を用いて処理する。画像中の全ての画素を白/黒へ 2 値化し、境界部の画素を空孔の淵部とみなす。空孔の淵部を楕円で近似することで、空孔中心と形状を求め、損傷テンソルの値を計算した。

ひずみの計算には、3.2.6 項の方法を用いた。

6.2.3 結果と考察

それぞれの試験片による実験結果と、提案した構成式による結果を描いたものを図 6.3 に示す。横軸に 3.2.6 節の方法で計算した引張方向のひずみを、縦軸に損傷テンソルの成分をとり、変形による空孔の成長挙動を表している。いずれにおいても、初期の空孔体積分率 f_0 を 0.10、空孔径 d を 2.0mm、配列角度 $\theta = 0[\text{deg}]$ とした。空孔配列間隔の比を、それぞれ $L_2 : L_1 = 1 : 1, 4 : 3, 3 : 2$ と変化させ、初期の異方性の影響を検討している。

$L_2 : L_1 = 1 : 1$ の実験結果を見ると、初期の空孔間隔は方向によらず同じため、損傷テンソルの主値 Ω_{11}, Ω_{22} も $\varepsilon = 0$ のときは同じ値となっている。変形が進むにつれて空孔が拡大し、 Ω_1, Ω_2 ともに値が大きくなっていく。引張方向に垂直な方向のほうが損傷が発展し

やすいと考えられるが、今回の実験結果においても、引張方向における空孔の面積分率を表す Ω_{11} の方が Ω_{22} よりも大きくなっている。空孔間隔比 $L_2 : L_1$ を $4 : 3$, $3 : 2$ としたモデルにおいては、初期の異方性を考えており、 $\varepsilon = 0$ において $\Omega_{11} \neq \Omega_{22}$ となっている。変形が進行すると、やはり引張方向成分である Ω_{11} の方が Ω_{22} よりも顕著に発展している。

ここで、A5052 と SUS304 の実験結果を比較する。それぞれ加工硬化係数が異なる材料であるが、損傷テンソルの変化はおおよそ重なっており、その差は計測誤差の範囲内といえる。母材の加工硬化係数が異なれば、例えば変形中における母材内の降伏応力の分布にも差が現れ、損傷テンソルの発展は異なる傾向を示すことも予想された。一方で、実験結果からこのような影響は小さいことがわかる。2.8 節において、 $\xi_2(\Omega, \varepsilon_M^p) = \xi_2 = \text{Const.}$ として ξ_2 に対する ε_M^p の影響を無視していたが、この仮定の妥当性が確認された。

次に、実験結果を提案した構成式で表すことを考える。提案した構成式にはいくつかのパラメータが残っているが、 c , h については、長岐・Sowerby⁽³⁸⁾ の検討から得られた $c = 0.5$, $h = 1.4$ を用いた。 ξ_2 については、 $L_2 : L_1 = 1 : 1$ における損傷テンソルの変化の実験値を適切に表すよう種々の値を試行し、 $\xi_2 = 0.3$ と決定した。他の空孔間隔比 ($L_2 : L_1 = 4 : 3, 3 : 2$) においても同じ値を使用しているが、提案した構成式によって損傷テンソルの変化がよく表されていることがわかる。このことから、本実験で用いた 5 円孔を有する 2 次元モデルにおいて、第 2 章における理論の妥当性が確認された。

6.3 結言

異方性 Gurson の降伏関数における損傷発展式について、直接的に塑性ひずみ速度の方向を考慮するスカラー関数を導入したモデルの妥当性を検証した。母材の加工硬化挙動について着目するため、有限要素解析よりも実在の多孔質延性材料に近いと思われる、円孔を空けた平板を用いた。得られた知見を以下にまとめる。

- 構成式により、損傷テンソルの異方的発展を表すことに成功した。基本的な理論は既報と同様であるが、損傷テンソルの発展式の導出の際に新たなパラメータ ξ_2 を導入し、塑性ひずみ速度の影響を考慮できるようにした。
- 今回検討した材料の範囲内では、空孔の成長挙動は母材の加工硬化係数によらず、与えられたひずみ・ひずみ履歴によって決定されることがわかった。このことから、損傷テンソルの発展式に母材の加工硬化挙動を織り込む必要がないことがわかり、比較的単純な式で損傷テンソルの発展式を導くことができた。
- 提案した構成式は、パラメータを変化させることなく、いくつかの空孔間隔比につい

第6章 多孔平板における空孔成長挙動の観察と加工硬化の影響

て妥当性が確認された。今後、この構成式を用いた有限要素解析による延性材料の破断予測が可能となることが期待される。

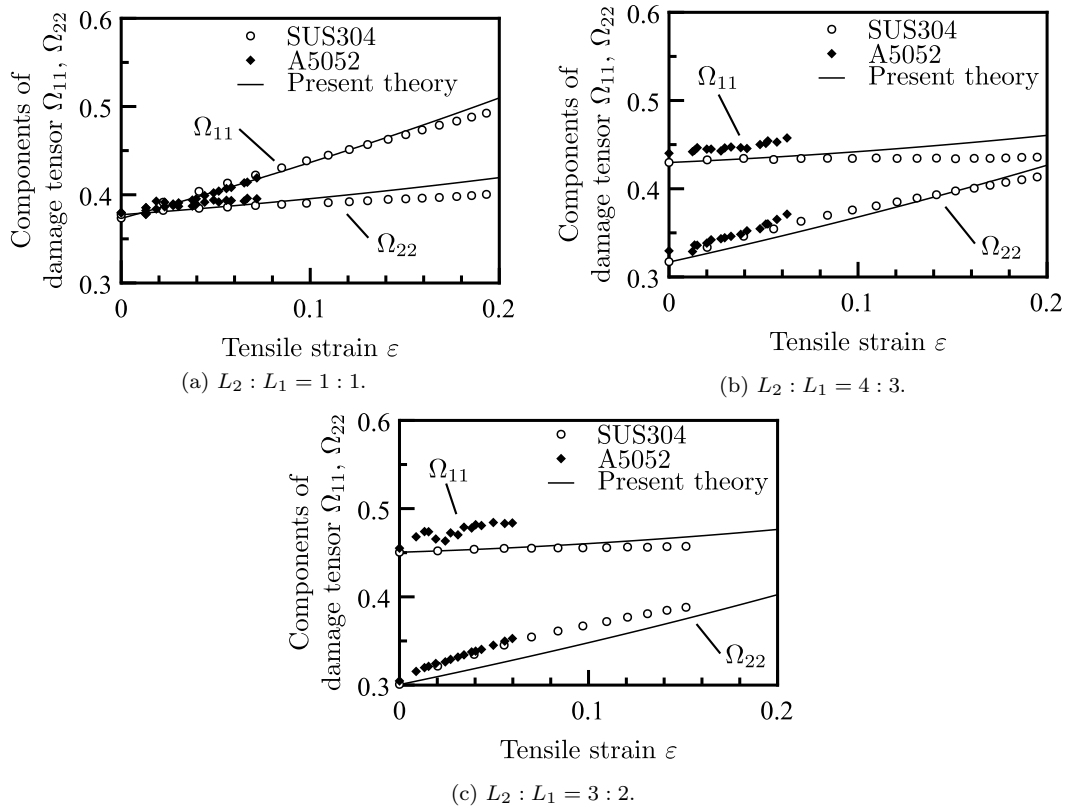


Fig. 6.3 Relation between tensile strain and components of damage tensor.

第7章 結論

本研究においては、多孔質延性材料の変形予測方法の開発を行った。開発の過程は以下のように要約される。

- Nagaki⁽⁴⁷⁾による、異方性 Gurson の降伏関数と空孔の等方的成長を仮定した構成式を用いて、空孔が不規則に分布した多孔平板の有限要素解析を行った。空孔の影響を損傷テンソルによって表すことで、単純かつ小規模な要素分割でも局所的な異方性を伴う損傷状態を表現した解析を行うことができると示した。
- 異方性 Gurson の降伏関数について、内部状態変数を用いた熱力学的議論に基づき、ひずみ履歴依存性を伴う空孔の3次元成長を考慮した、異方損傷発展式を導出した。理論の妥当性は規則的な空孔の配列を仮定した3次元有限要素モデルと、速度型構成式の数値積分結果とを比較することによって行った。比例負荷経路において種々の軸対称3軸ひずみを与えた場合においては、単位セルの異方的空孔成長挙動を精度よく表現できることが示された。しかしながら、単軸応力状態に対して適用するにはパラメータの値を大幅に変更する必要がある他、母材の非圧縮性を構成式に組み込んだ際に熱力学的矛盾点が生まれるといった問題点があり、理論の改善が望まれる。
- 上項における理論の矛盾点の解決と精度向上を目的とし、散逸不等式と散逸ポテンシャルに関する考察を再度行った。散逸不等式に関して、重複して定義していた熱力学的流束成分を独立な成分によって置き換えることで、矛盾なく母材非圧縮性を組み込むことができることを示した。提案した構成式は、降伏曲面と損傷発展式の両面で、単位セルの有限要素解析結果と一致した。一方で、降伏曲面をよく一致させるために用いたパラメータと、損傷テンソルの変化をよく表すように決定したパラメータの値が異なっており、この点については課題が残る。
- 異方性 Gurson の降伏関数における損傷発展式へ、塑性ひずみ速度の影響を組み込むためのスカラー関数を導入することを試みた。特に母材の加工硬化挙動が与える損傷テンソルの変化への影響を調査するため、多孔平板の変形実験の結果と比較し、妥当性を検証した。損傷テンソルの変化挙動は、今回行った条件では母材の加工硬化指数に影響されないことがわかり、比較的簡便な仮定をした式と一致した。

第7章 結論

今後の展望としては、以下の様な研究課題の検討が望まれる。

- 第3章で行った解析は、巨視的ひずみが5%程度といった比較的変形の小さな領域にとどまっている。第4章以降で空孔の3次元的成長を考慮した損傷発展式が導かれており、これらを用いてより大きく変形した場合の妥当性を検証していくことが望ましい。
- 実際の多孔質金属材料への応用を検討するべきと考える。例えば発泡材料内部の空孔分布を3次元CADデータにする技術も存在し、これらを利用した破壊解析を行って行くことが有用と考える。

付録A Benzergaによる空孔結合過程の降伏関数

第5章で議論した $\sigma - \sigma_H$ 平面における降伏曲線をよく表す降伏関数として, Benzerga⁽¹⁴⁾ によるモデルを紹介する. これは1つの楕円体空孔を内在する円筒状領域における軸対称応力状態を考察したものである. 空孔結合過程においては, 材料は単軸ひずみ引張状態で変形すると仮定し, 相当応力 σ_{eq} , 平均垂直応力 σ_H を用いて以下のような降伏関数 F_B を提案している.

$$F_B = \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_M} + \frac{3}{2} \frac{|\sigma_H|}{\sigma_M} - \frac{3}{2}(1 - \chi^2)C_f \quad (\text{A.1})$$

$$C_f = 0.1 \left(\frac{\chi^{-1} - 1}{W^2 + 0.1\chi^{-1} + 0.02\chi^{-2}} \right)^2 + 1.3\sqrt{\chi^{-1}} \quad (\text{A.2})$$

$$\chi \equiv \frac{R_x}{S_x} \quad (\text{A.3})$$

$$W \equiv \frac{R_z}{R_x} \quad (\text{A.4})$$

R_x, R_z はそれぞれ x, z 方向における楕円体空孔の半軸長, S_x は円筒領域の底面半径, S_z は z 方向空孔間距離の半分の長さである (図 A.1).

ここで, Benzerga の円筒領域における損傷テンソルの定義を考える. 損傷テンソルの主軸は円筒の軸と一致すると考え, 損傷テンソルの円筒軸 (z 軸) 方向成分 Ω_{zz} を z 軸方向面に投影した空孔面積と定義すれば, Ω_{zz} は以下ようになる.

$$\Omega_{zz} = \frac{R_x^2}{S_x^2} = \chi^2 \quad (\text{A.5})$$

よって, Benzerga の空孔結合過程における降伏条件式 (A.1) は, 損傷テンソルの成分 Ω_{zz} を用いて次式のように書くことができる.

$$F_B = \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_M} + \frac{3}{2} \frac{|\sigma_H|}{\sigma_M} - \frac{3}{2}(1 - \Omega_{zz}^{-\frac{1}{2}})C_f \quad (\text{A.6})$$

$$C_f = 0.1 \left(\frac{\Omega_{zz}^{-\frac{1}{2}} - 1}{W^2 + 0.1\Omega_{zz}^{-\frac{1}{2}} + 0.02\Omega_{zz}^{-1}} \right)^2 + 1.3\sqrt{\Omega_{zz}^{-\frac{1}{2}}} \quad (\text{A.7})$$

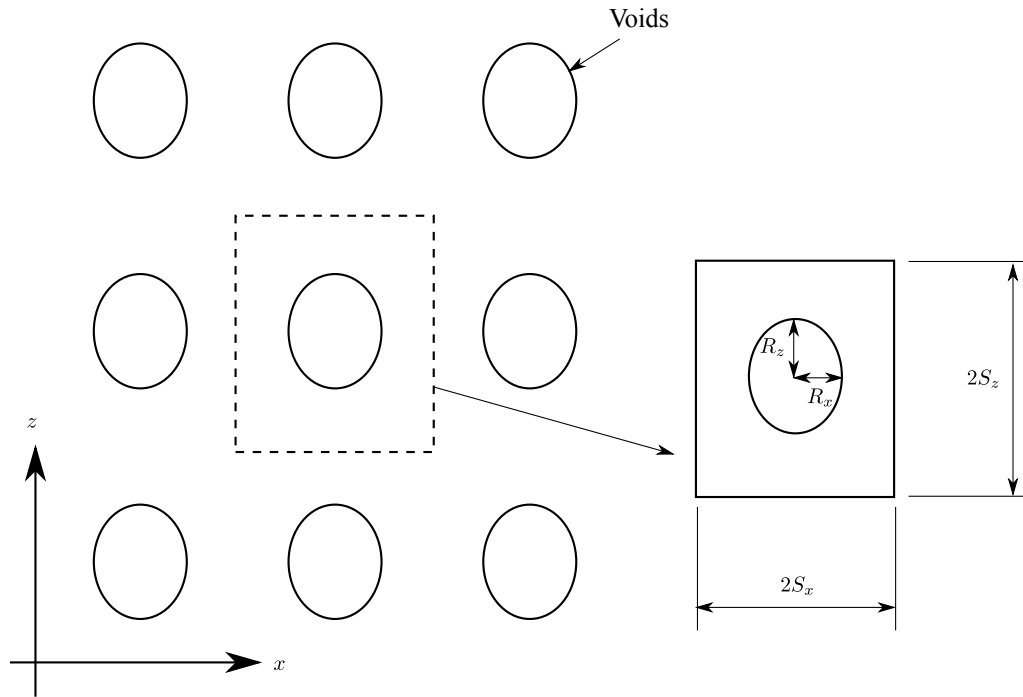


Fig. A.1 Benzerga's voids arrangement model and definitions of S_x , S_z , R_x , R_z .

ところで、損傷テンソルは空孔形状の情報を持たないため、損傷テンソルだけでは空孔縦横比 W を表すことができない。これを解決するためには追加の状態変数を導入することが必要であるが、ここでは簡単のため、空孔形状によらず $W = 1$ とする。これにより、 C_f は以下のように簡略化することができる。

$$C_f = 0.1 \left(\frac{\Omega_{zz}^{-\frac{1}{2}} - 1}{1 + 0.1\Omega_{zz}^{-\frac{1}{2}} + 0.02\Omega_{zz}^{-1}} \right)^2 + 1.3\sqrt{\Omega_{zz}^{-\frac{1}{2}}} \quad (\text{A.8})$$

しかしながら、Benzerga の降伏条件式は軸対称応力状態に限定した形で書かれており、単軸引張変形の開始する方向が z 方向に限定されている。また、 χ は明らかに方向性を有する量であるがスカラー量で表されており、一般の損傷状態へ拡張するためには、例えば損傷テンソルによって χ を置き換える必要がある。

図 A.2 は、静水応力 σ_H - 引張応力 σ 平面上において、単位セルの有限要素解析結果から求めた降伏点を描いたものである。初期の空孔体積分率を $f_0 = 0.01, 0.03, 0.05$ の3種類について計算し、空孔間距離の比 $L_3/L_1 = L_3/L_2$ を 0.75, 2.0, 3.0 の3通りとして、降伏曲線に対する異方性を調べている。

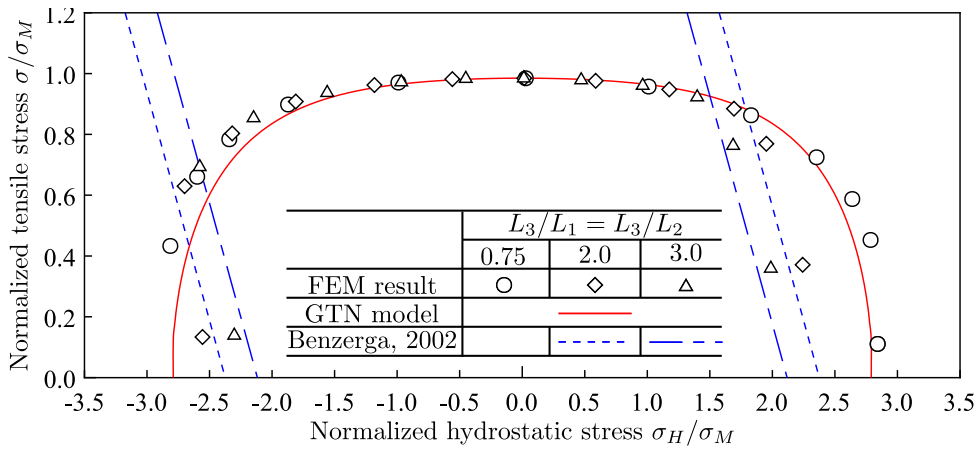
比較的応力3軸度の小さな領域については、降伏曲線は空孔間距離の比によらず1つの曲線上となっており、異方性が現れていないことがわかる。また、このような静水応力の絶対

値が小さい等方的領域については，図中に併記した GTN モデルが有限要素解析結果をよく表していることがわかる．

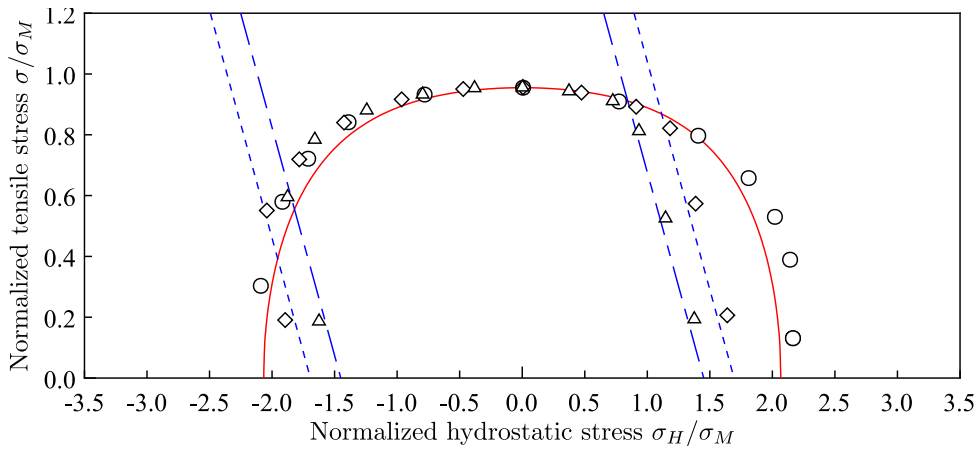
一方，応力三軸度の絶対値が大きな領域については，空孔間隔比によって降伏曲線が異なっていることがわかる．特に $L_3/L_1 = L_3/L_2 = 2.0, 3.0$ については，静水応力 σ_H - 引張応力 σ 平面上で直線的な降伏曲線となっている．図中の破線・一点鎖線は，式 (A.1) を描いたものである．Benzerga の降伏関数は異方性が現れる領域の降伏曲線を非常によく表していることがわかる．

このように，単位セルの初期降伏挙動は GTN モデルと Benzerga の降伏関数の組み合わせによって精度良く表すことができる．一方で，応力三軸度の大きさによって2つの降伏関数を使い分ける必要があり，尖り点を持った降伏曲線となっている．このため，構成式の導出と数値計算への組み込みには工夫が必要と言える．

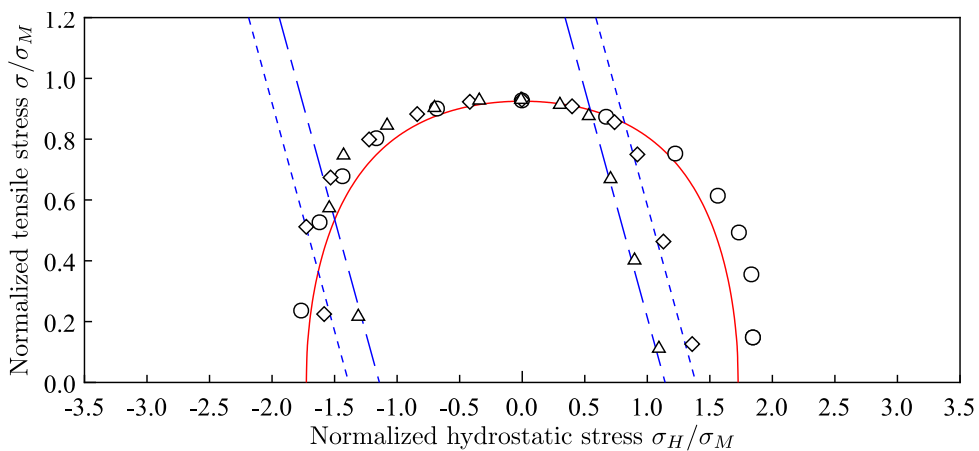
付録A Benzergerによる空孔結合過程の降伏関数



(a) $f_0 = 0.01$



(b) $f_0 = 0.03$



(c) $f_0 = 0.05$

参考文献

- [1] A. L. Gurson. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 99, No. 1, pp. 2–15, 1977.
- [2] C. C. Chu and A. Needleman. Void Nucleation Effects in Biaxially Stretched Sheets. *Transaction of the ASME, Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 102, p. 249, 1980.
- [3] V. Tvergaard. Influence of Voids on Shear Band Instabilities under Plane Strain Conditions. *International Journal of Fracture*, Vol. 17, pp. 389–407, 1981.
- [4] V. Tvergaard. On Localization in Ductile Materials Containing Spherical Voids. *International Journal of Fracture*, Vol. 18, No. 4, pp. 237–252, 1982.
- [5] V. Tvergaard and A. Needleman. Analysis of the Cup-Cone Fracture in a Round Tensile Bar. *Acta Metallurgica*, Vol. 32, No. 1, pp. 157–169, 1984.
- [6] E. Onate, M. Kleiber and C. A. De Saracibar. Plastic and Viscoplastic Flow of Void-Containing Metals. Applications to Axisymmetric Sheet Forming Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 25, No. 1, pp. 227–251, 1988.
- [7] J. Lemaitre. A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 107, No. 1, pp. 83–89, 1985.
- [8] G. Rousselier. Finite Deformation Constitutive Relations Including Ductile Fracture Damage. In *Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture: Proceedings of the IUTAM Symposium on Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture, Dourdan, France, 2-5 June 1980*. North-Holland Pub. Co., 1981.
- [9] G. Rousselier. Ductile Fracture Models and Their Potential in Local Approach of Fracture. *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 105, No. 1, pp. 97–111, 1987.
- [10] M. Gologanu, J. B. Leblond and D. Josette. Approximate Models for Ductile Metals Containing Non-Spherical Voids—Case of Axisymmetric Prolate Ellipsoidal Cavities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 41, No. 11, pp. 1723–1754, 1993.

参考文献

- [11] K. C. Liao, J. Pan and S. C. Tang. Approximate Yield Criteria for Anisotropic Porous Ductile Sheet Metals. *Mechanics of Materials*, Vol. 26, No. 4, pp. 213–226, 1997.
- [12] D. A. Wang, J. Pan and S. D. Liu. An Anisotropic Gurson Yield Criterion for Porous Ductile Sheet Metals with Planar Anisotropy. *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 13, No. 1, pp. 7–33, 2004.
- [13] A. A. Benzerga and J. Besson. Plastic Potentials for Anisotropic Porous Solids. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 20, No. 3, pp. 397–434, 2001.
- [14] A. A. Benzerga. Micromechanics of Coalescence in Ductile Fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 50, No. 6, pp. 1331–1362, 2002.
- [15] A. A. Benzerga, J. Besson and A. Pineau. Anisotropic Ductile Fracture: Part I: Experiments. *Acta Materialia*, Vol. 52, No. 15, pp. 4623–4638, 2004.
- [16] A. A. Benzerga, J. Besson and A. Pineau. Anisotropic Ductile Fracture: Part II: Theory. *Acta Materialia*, Vol. 52, No. 15, pp. 4639–4650, 2004.
- [17] 村上澄男, 大野信忠. 損傷を伴う有限クリープ変形の構成式とその応用. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 45, No. 392, pp. 318–326, 1979.
- [18] 村上澄男, 大野信忠. クリープ変形における損傷のテンソル的特性. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 45, No. 392, pp. 327–335, 1979.
- [19] 村上澄男, 大野信忠. 微視的空げきによる有効面積の減少を陽に表した多軸クリープ損傷変数. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 46, No. 409, pp. 940–946, 1980.
- [20] 村上澄男, 大野信忠. クリープ損傷構成式における材料損傷の局所性の効果. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 47, No. 418, pp. 573–581, 1981.
- [21] C. L. Chow and J. Wang. An Anisotropic Theory of Continuum Damage Mechanics for Ductile Fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27, No. 5, pp. 547–558, 1987.
- [22] C. L. Chow and J. Wang. A Finite Element Analysis of Continuum Damage Mechanics for Ductile Fracture. *International Journal of Fracture*, Vol. 38, No. 2, pp. 83–102, 1988.

- [23] C. L. Chow and T. J. Lu. A Normative Representation of Stress and Strain for Continuum Damage Mechanics. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 12, No. 2, pp. 161–187, 1989.
- [24] C. L. Chow and T. J. Lu. On evolution laws of anisotropic damage. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 34, No. 3, pp. 679–701, 1989.
- [25] C. L. Chow, L. G. Yu and M. Y. Demeri. A Unified Damage Approach for Predicting Forming Limit Diagrams. *Transaction of the ASME, Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 119, p. 346, 1997.
- [26] C. L. Chow, L. G. Yu, W. H. Tai and M. Y. Demeri. Prediction of Forming Limit Diagrams for AL6111-T4 under Non-Proportional Loading. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 43, No. 2, pp. 471–486, 2001.
- [27] 早川邦夫, 村上澄男. 熱力学的構成式理論による弾塑性-損傷材料の構成式と異方損傷発展式. *材料*, Vol. 45, No. 2, pp. 176–182, 1996.
- [28] 神谷邦夫, 村上澄男. 弾塑性-損傷材料のモデル化に対する実験的検討: 多軸組合せ負荷における損傷面の検討. *材料*, Vol. 45, No. 6, pp. 667–674, 1996.
- [29] 神谷邦夫, 村上澄男. 弾塑性-損傷材料に対する熱力学理論と応力空間における損傷発展式の定式化. *材料*, Vol. 45, No. 8, pp. 893–900, 1996.
- [30] 日本計算工学会. 均質化法入門. 計算力学レクチャーシリーズ / 日本計算工学会編. 丸善, 2003.
- [31] X. Wu and N. Ohno. A Homogenization Theory for Time-Dependent Nonlinear Composites with Periodic Internal Structures. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 36, pp. 4991–5012, 1999.
- [32] N. Ohno, D. Okumura and H. Noguchi. Microscopic Symmetric Bifurcation Condition of Cellular Solids Based on a Homogenization Theory of Finite Deformation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 50, pp. 1125–1153, 2002.
- [33] S. Ghosh, J. Bai and D. Paquet. Homogenization-Based Continuum Plasticity-Damage Model for Ductile Failure of Materials Containing Heterogeneities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 57, No. 7, pp. 1017–1044, 2009.

参考文献

- [34] F. Fritzen, S. Forest, T. Böhlke, D. Kondo and T. Kanit. Computational Homogenization of Elasto-Plastic Porous Metals. *International Journal of Plasticity*, Vol. 29, pp. 102–119, 2012.
- [35] S. Ghosh, K. Lee and S. Moorthy. Two Scale Analysis of Heterogeneous Elastic-Plastic Materials with Asymptotic Homogenization and Voronoi Cell Finite Element Model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 132, No. 1, pp. 63–116, 1996.
- [36] 浅田崇史, 大野信忠. 陰解法に基づく周期非弾性固体の増分均質化法. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 72, No. 722, pp. 1443–1450, 2006.
- [37] 長岐滋, R. Sowerby. 空孔を含む材料の塑性変形と異方性降伏関数. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 57, No. 539, pp. 1610–1616, 1991.
- [38] 長岐滋, R. Sowerby. 空孔を含む材料の塑性変形と異方性降伏関数 : 第 2 報, 単位セルの変形挙動と降伏曲面. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 57, No. 544, pp. 2949–2956, 1991.
- [39] M. Goya, S. Nagaki and R. Sowerby. Yield Criteria for Ductile Porous Solids. *JSME international journal. Ser. 1, Solid mechanics, strength of materials*, Vol. 35, No. 3, pp. 310–318, 1992.
- [40] 中山恭秀, 長岐滋, 阿部武治. 規則分布多孔平板の降伏応力と異方性降伏関数. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 62, No. 600, pp. 1877–1882, 1996.
- [41] P. E. Magnusen, E. M. Dubensky and D. A. Koss. The Effect of Void Arrays on Void Linking During Ductile Fracture. *Acta Metallurgica*, Vol. 36, No. 6, pp. 1503–1509, 1988.
- [42] P. E. Magnusen, D. J. Srolovitz and D. A. Koss. A Simulation of Void Linking During Ductile Microvoid Fracture. *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 38, No. 6, pp. 1013–1022, 1990.
- [43] 中山恭秀, 長岐滋, 阿部武治. 不規則分布多孔平板の降伏応力と異方性降伏関数. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 62, No. 602, pp. 2297–2304, 1996.
- [44] 中山恭秀, 長岐滋, 藤本順也, 阿部武治. 不規則円孔分布多孔平板における塑性変形と局所的な損傷状態の評価. 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 62, No. 604, pp. 2777–2783, 1996.

- [45] 長岐滋, 住吉克俊, 阿部克幸. 不規則分布多孔平板の二軸変形下における損傷状態の評価. *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 68, No. 667, pp. 428–433, 2002.
- [46] 大下賢一, 長岐滋, 高橋正也, 吉江大理. 引張・ねじり二軸応力下における損傷テンソルを用いた多孔質材料の損傷評価. *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 75, No. 752, pp. 483–490, 2009.
- [47] S. Nagaki, K. Ohsita and T. Hayashida. Elastic-Plastic Deformation of Perforated Sheets with Randomly Distributed Holes. *Key Engineering Materials*, Vol. Engineering Plasticity and Its Applications, pp. 241–246, 2007.
- [48] F. A. McClintock. A Criterion for Ductile Fracture by the Growth of Holes. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, No. 2, pp. 363–371, 1968.
- [49] J. R. Rice and D. M. Tracey. On the Ductile Enlargement of Voids in Triaxial Stress Fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 17, No. 3, pp. 201–217, 1969.
- [50] V. Tvergaard. Effect of Stress-State and Spacing on Voids in a Shear-Field. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, No. 22, pp. 3047–3054, 2012.
- [51] P. Longère, S. Bhogaraju and D. Craciun. Void Collapse/Growth in Solid Materials under Overall Shear Loading. *Mechanics Research Communications*, Vol. 69, pp. 1–7, 2015.
- [52] Y. K. Khdir, T. Kanit, F. Zairi and M. N. Abdelaziz. A Computational Homogenization of Random Porous Media: Effect of Void Shape and Void Content on the Overall Yield Surface. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 49, pp. 137–145, 2015.
- [53] F. Pastor, J. Pastor and D. Kondo. Numerical Limit Analysis and Plasticity Criterion of a Porous Coulomb Material with Elliptic Cylindrical Voids. *Comptes Rendus Mécanique*, Vol. 343, No. 3, pp. 199–209, 2015.
- [54] M. Pushkareva, J. Adrien, E. Maire, J. Segurado, J. Llorca and A. Weck. Three-Dimensional Investigation of Frain Orientation Effects on Void Growth in Commercially Pure Titanium. *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 671, pp. 221–232, 2016.
- [55] F. P. Preparata, M. I. Shamos(浅野哲夫, 浅野孝夫訳). 計算幾何学入門. 総研出版, 1992.

参考文献

- [56] 金谷健一. 構造異方性によりひずみを決定するステレオロジーの理論. 材料科学, Vol. 20, No. 4, pp. 223–232, 1984.
- [57] 吉江大理. 実質相当応力を用いた多孔質材料の損傷評価. 修士学位論文, 東京農工大学, 2004.
- [58] 林田武士. 長円空孔が分布する多孔平板の損傷評価. 修士学位論文, 東京農工大学, 2005.
- [59] 萱沼徹. 長円が不規則に分布する薄板の損傷状態の評価. 卒業論文, 東京農工大学, 2008.
- [60] 後藤健太. 空孔を不規則に分布させた平板の損傷状態の評価. 修士学位論文, 東京農工大学, 2011.
- [61] 長岐滋, 藤田博久, 阿部武治. 異方性 Gurson の降伏関数における空孔形状の影響. 日本機械学会計算力学講演会講演論文集, No. 12, pp. 59–60, 1999.
- [62] P. Chadwick. *Continuum Mechanics: Concise Theory and Problems*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 1998.
- [63] H. Ziegler(田中正隆, 田中喜久昭訳). 連続体の熱・力学入門. 森北出版, 1981.
- [64] 北川浩. 弾・塑性力学: 非線形解析のための基礎理論. 裳華房, 1987.
- [65] J. Lemaitre and J. L. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1994.
- [66] 村上澄男. 連続体損傷力学: 損傷・破壊解析の連続体力学的方法. 森北出版, 2008.
- [67] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer-Verlag, second edition, 1992.
- [68] 日本塑性加工学会. 非線形有限要素法: 線形弾性解析から塑性加工解析まで. コロナ社, 1994.
- [69] 小林功治. 不規則に空孔が分布する多孔平板の損傷評価. 卒業論文, 東京農工大学, 2012.
- [70] F. Ma and K. Kishimoto. On Yielding and Deformation of Porous Plastic Materials. *Mechanics of Materials*, Vol. 30, No. 1, pp. 55–68, 1998.
- [71] M. Grange, J. Besson and E. Andrieu. An Anisotropic Gurson Type Model to Represent the Ductile Rupture of Hydrided Zircaloy-4 Sheets. *International Journal of Fracture*, Vol. 105, pp. 273–293, 2000.

- [72] 狛館俊光. 多孔平板における空孔の変形形状の実験的検討と損傷評価. 修士学位論文, 東京農工大学, 2013.
- [73] 塚本平. 加工硬化を考慮した多孔平板における空孔成長挙動の実験的検討. 卒業論文, 東京農工大学, 2015.
- [74] 室井健太. 空孔直径を考慮した多孔平板における空孔成長挙動の実験的検討. 卒業論文, 東京農工大学, 2016.

本研究に関連する研究報告

学術論文

- [C1] 飯塚誠, 長岐滋, 大下賢一. 異方性 Gurson の降伏関数を用いた多孔平板の有限要素解析. 日本機械学会論文集A編, Vol. 78, No. 788, pp. 511–522, 2012.
- [C2] M. Iizuka, S. Nagaki and K. Oshita. Damage Evolution Equation Considering Three Dimensional Growth of Void. *Journal of Computational Science and Technology*, Vol. 7, No. 2, pp. 205–220, 2013.
- [C3] S. Nagaki, D. Saboi, K. Muroi, M. Iizuka and K. Oshita. Anisotropic Damage Evolution for Perforated Sheet Under Tensile Deformation. *Key Engineering Materials*, Vol. 725, pp. 489–494 2016.
- [C4] 飯塚誠, 長岐滋, 大下賢一. 熱力学的考察に基づく多孔質材料の異方性弾塑性構成式. 日本機械学会論文集, 2017(accepted).
- [C5] 飯塚誠, 長岐滋, 大下賢一, 狹館俊光, 塚本平. 多孔平板における空孔の異方的成長の計測と解析. 材料, 2017(submitted).

国際会議

- [C6] M. Iizuka, S. Nagaki and K. Oshita. Damage Evolution Equation Considering Three Dimensional Growth of Void. *JSME-CMD International Computational Mechanics Symposium 2012, Kobe, Japan (JSME-CMD ICMS2012)*, MS4-2-2, 2012.
- [C7] D. Saboi, S. Nagaki, K. Oshita, M. Iizuka and T. Endate. Validation for anisotropic void growth law and void growth behavior of uniaxial tensile test in perforated sheet. *Proceedings of the ACMFMS2014*, 2014.
- [C8] S. Nagaki, D. Saboi, K. Muroi, M. Iizuka and K. Oshita. Anisotropic Damage Evolution for Perforated Sheet Under Tensile Deformation. *Proceedings of the AEPA2016*, 2016.

国内会議

- [C9] 飯塚誠, 長岐滋, 大下賢一. 異方性 Gurson の降伏関数を用いた多孔平板の有限要素解析. 日本機械学会計算力学講演会論文集 (CD-ROM), 24th, No. 2313, 2011.
- [C10] 川口翔太, 飯塚誠, 大下賢一, 長岐滋. 異方性 Gurson の降伏関数を用いた二軸応力下における多孔平板の有限要素解析. M & M2013 カンファレンス, No. 13-8, 2013.
- [C11] 飯塚誠, 長岐滋, 大下賢一. 熱力学的考察に基づく多孔質材料の弾塑性構成式. 日本機械学会 関東支部第 22 期総会・講演会, 2016.

謝辞

本論文ならびに関連発表論文における研究の遂行と論文の執筆においては、全面において、長岐滋教授にご指導をいただきました。先生の構成式理論やテンソル解析に関する深遠な知識には感服すると共に、何度も貴重なご助言を賜りました。未熟な著者が研究活動を行うことができたのは、先生の高い教育能力のおかげに他なりません。心より感謝申し上げます。

大下賢一助教には、実験装置の扱い方のご指導や、論文の校閲、研究に関するご助言をいただきました。お忙しい中にも関わらず、細かい点に至るまで様々なご指摘をいただいたこと、深く感謝いたします。

桑原利彦教授、小笠原俊夫教授、笹原弘之教授、山中晃徳准教授、花崎逸雄准教授には、本論文の審査における副査として、ご指導・ご鞭撻をいただきました。様々な意見を賜り、多面的に論文を遂行することができました。研究活動でお忙しい中にも関わらず、ありがとうございます。

本論文の一部において、長岐研究室 OB の伏館俊光氏、塚本平氏、室井健太氏による成果を引用させていただいております。実験的検討の結果を追加することができたため、理論の裏付けを確かなものとすることができました。誠にありがとうございます。

長岐研究室所属の片岡拓也氏、木口瑞玖氏には、本論文の審査における一部の手続きを代行いただきました。本来ならば著者自ら行うべきところ、快く引き受けていただき、ありがとうございました。

株式会社ブリヂストン、岩城伸嘉ユニットリーダー、熊谷健司ユニットリーダー、品川正樹氏には、社会人博士後期課程として研究活動を行うことに、寛大なご理解をいただきました。業務との関連性が希薄でありながらも、基盤的な工学理論の習得に賛同いただけたこと、大変ありがたく存じます。

この他にも、紙面に書ききれないほど多くの方々のご理解・ご協力のもと、研究活動を遂行してまいりました。本研究を通じて関わった全ての方々に感謝申し上げます。

2017年3月
東京農工大学大学院工学府機械システム工学専攻
システム基礎解析専修 長岐研究室
飯塚 誠